

# Álgebra geométrica y geometrías ortogonales

por

**Sebastià Xambó**

*A David Hestenes en el cincuentenario de Space-time Algebra*

**RESUMEN.** El objeto de este artículo es exponer una presentación axiomática del álgebra geométrica e indicar cómo se aplica al estudio de los grupos asociados a las geometrías ortogonales. Este enfoque proporciona un acceso rápido a los conceptos, estructura las interdependencias entre los enunciados más relevantes, y suministra claves que redundan en la transparencia de las demostraciones. El propósito no es otro que aportar una base matemática asequible que facilite el estudio de las diversas aplicaciones del álgebra geométrica a contextos matemáticos, de física matemática o de ingeniería *lato sensu*.

## 1. INTRODUCCIÓN

El contenido de este artículo es un destilado de algunos materiales expuestos, entre marzo de 2015 y agosto de 2016, en dos cursillos impartidos en la Universidad de San Luis Potosí (México), en dos cursillos impartidos en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valladolid, y en las conferencias impartidas en la Escuela Santaló 2016. Su objeto es exponer las bases del álgebra geométrica mediante un tratamiento axiomático y aportar todos los detalles matemáticos que nos parecen imprescindibles para ulteriores aplicaciones, particularmente a la física matemática.

La presentación axiomática propiamente dicha se detalla en la sección 2. Aquí el énfasis recae, después de enunciar los axiomas y su significación, en la introducción y estudio de una constelación de conceptos y resultados que emergen de dichos axiomas. Destacan la graduación lineal canónica, los productos exterior e interior, las involuciones de paridad y de reversión, y una colección de fórmulas que relacionan estos elementos y facilitan su manipulación efectiva.

En la sección 3 se introduce el grupo de versores de un álgebra geométrica, así como los subgrupos de pinos, espinos y rotores, y se establecen las relaciones fundamentales que existen con el grupo ortogonal (versores y pinos) y con el grupo especial ortogonal (espinos y rotores). La sección termina con el ejemplo arquetípico de los rotores planos de un espacio euclídeo.

La última sección se destina a profundizar en el estudio de los grupos mencionados en el párrafo anterior, vistos como grupos de Lie. En este estudio juegan un papel fundamental la caracterización de Lipschitz del grupo de versores, el hecho de que el grupo de rotores determina los demás grupos, y los resultados relativos al álgebra de Lie de dicho grupo.

## NOTACIONES Y CONVENCIONES

Si  $k$  es un número entero, ponemos  $k//2$  para denotar el cociente entero de  $k$  por 2. Es inmediato comprobar que tiene la misma paridad que  $\binom{k}{2}$ , lo cual será usado repetidamente para sustituir el signo  $(-1)^{\binom{k}{2}}$  por  $(-1)^{k//2}$ .

$\mathbb{R}$  denota el cuerpo de los *números reales*. Sus elementos se designan con letras griegas  $(\alpha, \lambda, \rho, \omega, \dots)$ .<sup>1</sup>

*Espacio vectorial* significa  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

El símbolo  $E$  denota un espacio vectorial de dimensión finita  $n$ . Sus elementos se denotan con letras itálicas negritas  $(\mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots)$ . Una base típica de  $E$  se denota  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ .

Pondremos  $q$  para denotar una *métrica* de  $E$ , esto es, una forma bilineal simétrica que supondremos no degenerada si no se dice lo contrario. En lugar de  $q(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ , que es la *forma cuadrática* asociada a  $q$ , escribiremos simplemente  $q(\mathbf{x})$ .

Dos vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$  se dice que son *q-ortogonales*, o simplemente *ortogonales*, cuando  $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ . De una base  $\mathbf{e}$  tal que  $q(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0$  para  $j \neq k$  se dice que es *ortogonal*. Toda métrica  $q$  (incluso si es degenerada) admite bases ortogonales.

La *signatura*  $(r, s)$  de  $q$  denota que en una base ortogonal  $\mathbf{e}$  hay  $r$  vectores tales que  $q(\mathbf{e}_j) > 0$  y  $s$  vectores tales que  $q(\mathbf{e}_j) < 0$ . Puesto que la métrica es no degenerada,  $r + s = n$  (si  $q(\mathbf{e}_j) = 0$  para algún  $j$ , entonces  $q(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0$  para todo  $k$  y la métrica sería degenerada). La definición de  $(r, s)$  no depende de la base ortogonal usada para calcularla (*ley de inercia de Sylvester*).

Toda base ortogonal se puede normalizar de modo que  $q(\mathbf{e}_j) = \pm 1$  para todo  $j$ . Tales bases se llaman *ortonormales*. Su existencia prueba que la signatura determina  $q$  salvo una isometría: si  $\mathbf{e}'$  es una base  $q'$ -ortogonal de  $E'$  y su signatura es también  $(r, s)$ , podemos suponer, reordenando  $\mathbf{e}'$  si fuese necesario, que  $q(\mathbf{e}_j) = q'(\mathbf{e}'_j)$  para todo  $j$ , y entonces el isomorfismo lineal  $f: E \rightarrow E'$  tal que  $f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}'_j$  cumple  $q'(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  cualesquiera que sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ .

Por *álgebra* entendemos un espacio vectorial *no nulo*  $\mathcal{A}$  (posiblemente de dimensión infinita) dotado de un producto bilineal  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $(x, y) \mapsto x * y$ . Si no se dice explícitamente lo contrario, también suponemos que el producto es *asociativo*,  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , y *unital* (existe  $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$  tal que  $1_{\mathcal{A}} \neq 0_{\mathcal{A}}$  y  $1_{\mathcal{A}} * x = x * 1_{\mathcal{A}} = x$  para todo  $x \in \mathcal{A}$ ).

El *álgebra tensorial* de  $E$ ,  $(TE, \otimes)$ , es la suma directa de las *potencias tensoriales*  $T^k E$  de  $E$  ( $k \geq 0$ ),

$$TE = \bigoplus_{k \geq 0} T^k E = \mathbb{R} \oplus E \oplus T^2 E \oplus \dots$$

dotada del producto tensorial  $\otimes$ . Es un álgebra *graduada*, esto es,  $x \otimes x' \in T^{k+k'} E$  cuando  $x \in T^k E$  y  $x' \in T^{k'} E$ .

Si  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  es una base de  $E$ , los  $n^k$  productos

$$\mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_k}, \quad j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\},$$

<sup>1</sup>Muchas de las consideraciones que siguen son válidas si en lugar de  $\mathbb{R}$  se toma un cuerpo conmutativo cualquiera de característica distinta de 2. Optamos por  $\mathbb{R}$  porque es el único cuerpo relevante, en el contexto del álgebra geométrica, para las aplicaciones físicas y de ingeniería.

forman una base de  $T^k E$ . En particular,  $\dim T^k E = n^k$ , mientras que  $\dim TE = \infty$ .

*Propiedad universal:* Si  $f : E \rightarrow E'$  es una aplicación lineal, existe un único homomorfismo de álgebras  $f^\otimes : TE \rightarrow TE'$  tal que  $f^\otimes(e) = f(e)$  para todo  $e \in E$ .

En particular, existe un único automorfismo del álgebra  $TE$ ,  $x \mapsto \hat{x}$ , tal que  $\hat{e} = -e$  para todo  $e \in E$ . Este automorfismo es involutivo y se llama *involución de paridad* de  $TE$ . Nótese que para todo  $x \in T^k E$ ,  $\hat{x} = (-1)^k x$ .

También existe un único *antiautomorfismo* de álgebras de  $TE$ ,  $x \mapsto \tilde{x}$ , tal que  $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)^\sim = x_k \otimes \cdots \otimes x_1$  para todo  $k \geq 1$  y cualesquiera que sean  $x_1, \dots, x_k \in E$ . Es claramente involutivo y se llama (involución de) *reversión* de  $TE$ . El fundamento de esta construcción es que la aplicación  $E^k \rightarrow T^k E$ ,  $(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_k \otimes \cdots \otimes x_1$ , es multilineal y, en consecuencia, existe una única aplicación lineal  $T^k E \rightarrow T^k E$  tal que  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \mapsto x_k \otimes \cdots \otimes x_1$ .

El *álgebra exterior* (o *álgebra de Grassmann*) asociada a  $E$ ,  $(\wedge E, \wedge)$ , es la suma directa de las *potencias exteriores*  $\wedge^k E$  de  $E$  ( $0 \leq k \leq n$ ),

$$\wedge E = \bigoplus_{k=0}^n \wedge^k E = \mathbb{R} \oplus E \oplus \wedge^2 E \oplus \cdots \oplus \wedge^n E$$

dotada del producto exterior  $\wedge$ . Es un álgebra *graduada*, pues  $x \wedge x' \in \wedge^{k+k'} E$  cuando  $x \in \wedge^k E$  y  $x' \in \wedge^{k'} E$ , conviniendo que  $\wedge^r E = \{0\}$  para  $r > n$ . El producto exterior es *anticonmutativo* (o *superconmutativo*): si  $x \in \wedge^k E$  y  $x' \in \wedge^{k'} E$ ,

$$x \wedge x' = (-1)^{kk'} x' \wedge x.$$

Dada una base  $e_1, \dots, e_n$  de  $E$ , los  $\binom{n}{k}$  productos

$$e_j = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n,$$

forman una base de  $\wedge^k E$ . En particular,  $\dim \wedge^k E = \binom{n}{k}$  y  $\dim \wedge E = 2^n$ .

## 2. PRESENTACIÓN AXIOMÁTICA DEL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

El primer capítulo de [5] (titulado *Geometric Algebra*) proporciona una sinopsis funcional del álgebra geométrica. De sus siete secciones, las cinco primeras son generales y las dos últimas tratan los casos particulares del espacio euclídeo ordinario y del espacio de Minkowski. A esas escasas 33 páginas hay que añadir los cuatro apéndices A–D (12 páginas) destinados a exponer diversas cuestiones técnicas. Aunque tendremos en cuenta estos materiales, y otros posteriores, como [6] (Capítulo 1, *Geometric Algebra*, páginas 1–43), en esta ocasión nos parece más adecuado estructurar nuestro análisis como un compendio, formulado en lenguaje matemático estándar, de las aproximaciones que consideramos más representativas, que incluyen, además de las mencionadas obras de Hestenes, los estudios [10] y [1], e importantes precisiones de otros autores, como por ejemplo [9], [2] y [3]. Dado que se está lejos de disponer de un sistema de notaciones bien establecido, usamos las que nos parecen más adecuadas.

## 2.1. AXIOMAS

Empecemos con una presentación axiomática del *Álgebra Geométrica* que nos va a permitir establecer primero resultados de existencia y unicidad y después desarrollar, para cada signatura  $(r, s)$ , la estructura de la única álgebra geométrica  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{r,s}$ .

Un *álgebra geométrica* (AG) es una estructura con los ingredientes descritos en **A0** y que satisface las propiedades **A1**–**A4** que se declaran a continuación:

**A0. Estructura:** Un álgebra  $\mathcal{A}$  con un subespacio distinguido  $E \subseteq \mathcal{A}$  que no contiene la unidad  $1 = 1_{\mathcal{A}}$ . Ponemos  $(\mathcal{A}, E)$  para denotar esta estructura. Los elementos de  $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$  (vía la aplicación  $\lambda \mapsto \lambda 1_{\mathcal{A}}$ ) se llaman *escalares* y los de  $E$ , *vectores*. Nótese que  $\mathbb{R} \cap E = \{0\}$ . El producto de  $\mathcal{A}$  se llama *producto geométrico* y se denota  $xy$  (yuxtaposición de los factores).

**A1.**  $\mathcal{A}$  está generada por  $E$  como una  $\mathbb{R}$ -álgebra. En otras palabras,  $1_{\mathcal{A}}$  y los productos de un número finito de vectores generan  $\mathcal{A}$  como espacio vectorial. Si convenimos que  $1_{\mathcal{A}}$  es un producto de cero vectores, basta con la segunda condición.

**A2. Regla de contracción:**  $\mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}$  para todo vector  $\mathbf{x}$ .

Este axioma fue introducido en esencia por Clifford y tiene un carácter fundamental en comparación con los otros, que son de naturaleza más bien técnica.

La *magnitud*  $|\mathbf{x}| \geq 0$  de  $\mathbf{x} \in E$  se puede definir por la relación  $|\mathbf{x}|^2 = \epsilon_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^2$ , siendo  $\epsilon_{\mathbf{x}}$  el signo de  $\mathbf{x}^2$ , que en este contexto se llama *signatura* de  $\mathbf{x}$ . En particular se tiene que  $|\mathbf{x}| = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x}^2 = 0$  (de tales vectores se dice que son *isótropos*). Los vectores de magnitud 1 se dice que son *unitarios*.

Nótese que si  $\mathbf{x}$  es no isótropo, entonces  $\mathbf{x}$  es invertible y  $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}/\mathbf{x}^2 \in \langle \mathbf{x} \rangle \subseteq E$ .

Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ , definimos  $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x})$ .

LEMA 2.1.  $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ .

DEMOSTRACIÓN. La propiedad distributiva del producto nos permite escribir

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} + \mathbf{y}^2.$$

Puesto que  $\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2, (\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 \in \mathbb{R}$ , se sigue que  $\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} = 2q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ . □

Como  $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$  es una función simétrica y bilineal, es una métrica (posiblemente degenerada) para  $E$  (*métrica de Clifford* o simplemente *métrica*). La expresión  $\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x} = 2q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es la *relación de Clifford*. Poniendo  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ , se obtiene  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ , lo que significa que la regla de contracción y la relación de Clifford son equivalentes.

Nótese que *dos vectores son ortogonales si y sólo si anticommutan*.

**A3.** Supondremos que la métrica de Clifford  $q$  es no degenerada. Su signatura se denota  $(r, s)$ .

Para la formulación del axioma **A4** tenemos que dedicar un cierto espacio a consideraciones preliminares, que por otra parte tienen un papel importante en todo el sistema.

Supongamos que  $\mathbf{e}$  es ortogonal (u ortonormal cuando así se indique). Sea  $N = \{1, \dots, n\}$  (conjunto de *índices*) y, si  $K = k_1, \dots, k_l$  es una sucesión (finita) de índices, pongamos  $\mathbf{e}_K = \mathbf{e}_{k_1} \cdots \mathbf{e}_{k_l}$ . Por último, sea  $B = \{\mathbf{e}_J\}$ ,  $J \subseteq N = \{1, \dots, n\}$  (a los subconjuntos de  $N$  los llamamos *multiíndices*).

**PROPOSICIÓN 2.2.** *B es un sistema de generadores de  $\mathcal{A}$  como espacio vectorial. Como consecuencia,  $\dim \mathcal{A} \leq 2^n$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Los elementos de la forma  $\mathbf{e}_K$ , siendo  $K$  una sucesión finita de índices cualquiera, generan  $\mathcal{A}$  como espacio vectorial (usar **A1**, la bilinealidad del producto, y el convenio  $\mathbf{e}_\emptyset = 1$ ). Los  $\mathbf{e}_K$  con  $k_1 \leq \dots \leq k_l$  también generan  $\mathcal{A}$  como espacio vectorial. En efecto, puesto que  $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ , el producto  $\mathbf{e}_K$  es igual a  $(-1)^{t(K)} \tilde{\mathbf{e}}_K$ , siendo  $\tilde{K}$  el resultado de reordenar  $K$  en orden no decreciente y  $t(K)$  el número de inversiones en la secuencia  $K$ . Después de esto, los factores repetidos aparecen agrupados y se pueden simplificar con la regla de contracción. El resultado es un múltiplo escalar de algún  $\mathbf{e}_J \in B$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.3** (Fórmula de Artin). *Si  $I, J$  son multiíndices,*

$$\mathbf{e}_I \mathbf{e}_J = (-1)^{t(I, J)} q_{I \cap J} \mathbf{e}_{I \Delta J},$$

*siendo  $I \Delta J$  la diferencia simétrica de  $I$  y  $J$ ,  $q_K = q(\mathbf{e}_{k_1}) \cdots q(\mathbf{e}_{k_l})$  para cualquier secuencia de índices  $K = k_1, \dots, k_l$ , y  $t(I, J)$  el número de inversiones en la secuencia  $I, J$  que resulta de concatenar  $I$  y  $J$ . En particular,  $\mathbf{e}_J^2 = (-1)^{|J|/2} q_J$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Al reordenar  $\mathbf{e}_I \mathbf{e}_J$  en orden no decreciente, se producirán  $t(I, J)$  cambios de signo, los factores repetidos serán  $\mathbf{e}_k^2 = q(\mathbf{e}_k)$  para  $k \in I \cap J$  y el producto restante será  $\mathbf{e}_{I \Delta J}$ . Para la segunda afirmación, basta recordar que  $t(J, J) = (-1)^{\binom{|J|}{2}} = (-1)^{|J|/2}$ .  $\square$

**Grupo de Clifford:** Si  $\mathbf{e}$  es ortonormal,  $B^\pm = \{\pm \mathbf{e}_J \mid \mathbf{e}_J \in B\}$  es un grupo multiplicativo (por la fórmula de Artin) y  $|B^\pm| \leq 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ .

**PROPOSICIÓN 2.4** (Regla de conmutación). *Si  $J$  y  $K$  son multiíndices, entonces  $\mathbf{e}_K \mathbf{e}_J = (-1)^c (-1)^{|J||K|} \mathbf{e}_J \mathbf{e}_K$ , siendo  $c = |I \cap J|$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** En efecto, hay  $|J||K|$  pares  $(j_i, k_l)$  ( $i = 1, \dots, |J|$ ,  $l = 1, \dots, |K|$ ). El número de pares con  $j_i > k_l$  es  $t(J, K)$ , el de pares con  $k_l > j_i$  es  $t(K, J)$ , y hay  $c$  pares tales que  $j_i = k_l$  (coincidencias). Por tanto  $|J||K| = t(J, K) + t(K, J) + c$ , o bien  $t(K, J) \equiv |J||K| + c + t(J, K) \pmod{2}$ . La afirmación resulta ahora inmediata, pues  $J \cap I = I \cap J$  y  $J \Delta I = I \Delta J$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.5.** Las fórmulas de las proposiciones 2.3 y 2.4 se pueden ver como algoritmos para obtener la tabla de los productos geométricos de los generadores  $B$ , la cual se puede usar para calcular el producto geométrico (como ilustración, véanse los ejemplos 2.20 y 2.21). Obsérvese que si la base es ortonormal, entonces  $\mathbf{e}_I \mathbf{e}_J = \pm \mathbf{e}_{I \Delta J}$ ,  $\mathbf{e}_J \mathbf{e}_I = \pm \mathbf{e}_I \mathbf{e}_J$  y  $\mathbf{e}_J^2 = \pm 1$ .

El análisis de la (in)dependencia lineal de  $B$  se suele formular siguiendo las pautas indicadas por M. Riesz en [10], con enmiendas debidas a varios autores (véase, por ejemplo, la discusión en [11, pp. 43–44]). Pero lamentablemente ninguna de las enmiendas que conocemos señala una suposición implícita en el argumento básico de Riesz. Cuando se pone de manifiesto esta suposición, el camino más expeditivo, que es el que seguiremos aquí, es formularla como un axioma y mostrar con ejemplos que es realmente necesario. Este proceder tiene la ventaja de que evita prolijas discusiones, salvo en los ejemplos aludidos, sobre la existencia de álgebras incompletas (o no universales), en el sentido que se dirá, y sobre su estructura.

**A4.** Existe una base ortonormal  $\mathbf{e}$  tal que  $\mathbf{e}_L \neq \pm 1$  para todo multiíndice  $L \neq \emptyset$ .

En lo que sigue, y hasta nuevo aviso, supondremos que  $\mathbf{e}$  satisface **A4**. El lema que sigue garantiza que  $B$  satisface la «suposición implícita» a la que hemos aludido.

**LEMA 2.6.** *Si  $J$  y  $K$  son multiíndices y  $J \neq K$ , entonces  $\mathbf{e}_J \mathbf{e}_K^{-1} \neq \pm 1$  o, equivalentemente,  $\mathbf{e}_J \neq \pm \mathbf{e}_K$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Se tiene  $\mathbf{e}_K^{-1} = \pm \mathbf{e}_K$  y  $\mathbf{e}_J \mathbf{e}_K^{-1} = \pm \mathbf{e}_J \mathbf{e}_K = \pm \mathbf{e}_{J \triangle K}$  (por ser  $\mathbf{e}$  ortonormal) y  $\mathbf{e}_{J \triangle K} \neq \pm 1$  (por **A4**, ya que  $J \triangle K \neq \emptyset$ ).  $\square$

**TEOREMA 2.7.** *El conjunto  $B$  es linealmente independiente y por tanto  $\dim \mathcal{A} = 2^n$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La idea esencial es de Riesz [10]. Supongamos que se verifica una relación lineal  $\sum_J \lambda_J \mathbf{e}_J = 0$ . Queremos mostrar que entonces  $\lambda_K = 0$  para cualquier  $K$ . A tal fin, bastará ver que  $\lambda_\emptyset = 0$ , pues el lema anterior asegura que si multiplicamos la relación inicial por  $\mathbf{e}_K^{-1}$  se obtiene una relación similar cuyo término  $\mathbf{e}_\emptyset$  tiene coeficiente  $\lambda_K$ .

Para cada índice  $k$ , la relación original implica  $\sum_J \lambda_J \mathbf{e}_k \mathbf{e}_J \mathbf{e}_k^{-1} = 0$ . Dado que  $\mathbf{e}_k$  conmuta o anticonmuta con  $\mathbf{e}_J$ , es inmediato inferir la relación  $\sum_J \lambda_J \mathbf{e}_J = 0$  en la que la suma se extiende a los  $\mathbf{e}_J$  que conmutan con todos los  $\mathbf{e}_k$ . Ahora notemos que  $\mathbf{e}_J$  anticonmuta con cualquiera de sus factores cuando  $|J|$  es par y positivo, y que anticonmuta con cualquier  $\mathbf{e}_k$  tal que  $k \notin J$  cuando  $|J|$  es impar. Puesto que tales  $k$  existen si  $n$  es par (cualquier  $k \in N - J \neq \emptyset$ ), en ese caso sólo queda la relación  $\lambda_\emptyset = 0$ , como se quería ver.

Podemos pues suponer que  $n$  es impar. El argumento anterior muestra que el único  $J$  que no se puede excluir es  $N$ , de manera que nos queda una relación de la forma  $\lambda_\emptyset + \lambda_N \mathbf{e}_N = 0$ . La demostración será completa si vemos que  $\lambda_N = 0$ . Razonemos por reducción al absurdo: no puede ser  $\lambda_N \neq 0$  porque esto nos llevaría a la relación  $\mathbf{e}_N = \lambda \in \mathbb{R}$  y ésta a la contradicción (de **A4**)  $\mathbf{e}_N = \pm 1$ , pues de  $\pm 1 = \mathbf{e}_N^2 = \lambda^2$  se desprende que  $\lambda^2 = 1$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.8.** Está claro que si  $\dim(\mathcal{A}) = 2^n$ , entonces  $B$  es linealmente independiente para cualquier base ortogonal y por tanto **A4** se satisface para cualquier base ortonormal. Queda así claro que en lugar de **A4** podíamos haber optado por suponer directamente que  $\dim(\mathcal{A}) = 2^n$  (álgebras *completas*). Esto evitaría el teorema 2.7, pero nos dejaría a oscuras acerca de la existencia y naturaleza de álgebras que

satisfacen todos los axiomas excepto **A4** (álgebras *incompletas*) y sobre las cuales se incluyen unas breves indicaciones en el ejemplo 2.15.

**PROPOSICIÓN 2.9.** *Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  álgebras geométricas con la misma signatura y  $E, E'$  los correspondientes espacios de vectores. Sea  $f : E \rightarrow E'$  una isometría. Entonces existe un único homomorfismo de álgebras  $f^\sharp : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  que coincide con  $f$  en  $E$  y este homomorfismo es un isomorfismo.*

**DEMOSTRACIÓN.** Tomemos  $\mathbf{e}$  ortonormal y sea  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n, \mathbf{e}'_k = f(\mathbf{e}_k)$ . Dado que  $f$  es una isometría,  $\mathbf{e}'$  es una base ortonormal de  $E'$ . Entonces  $B = \{\mathbf{e}_J\}$  es una base de  $\mathcal{A}$  y  $B' = \{\mathbf{e}'_J\}$  es una base de  $\mathcal{A}'$ . Si  $f^\sharp$  existe,  $f^\sharp(\mathbf{e}_J) = \mathbf{e}'_J$ . Esto muestra que  $f^\sharp$  queda unívocamente determinada como aplicación lineal y que es un isomorfismo.

Para ver que  $f^\sharp$  es un homomorfismo de álgebras, basta mostrar que  $f(\mathbf{e}_J \mathbf{e}_K) = \mathbf{e}'_J \mathbf{e}'_K$  cualesquiera que sean los multiíndices  $J$  y  $K$ . Pero esto es una consecuencia inmediata de la fórmula de Artin, ya que si  $L = J \triangle K$ , entonces  $\mathbf{e}_J \mathbf{e}_K = \epsilon \mathbf{e}_L$  y  $\mathbf{e}'_J \mathbf{e}'_K = \epsilon \mathbf{e}'_L$  (el mismo signo  $\epsilon$ ).  $\square$

## 2.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL AG COMPLETA (O ÁLGEBRA DE CLIFFORD)

Sea  $q$  una métrica (no degenerada) de  $E$ . Sea  $C_q E$  el álgebra cociente  $TE/I_q E$ , donde  $I_q E$  es el ideal del álgebra tensorial  $TE$  generado por los tensores de la forma  $\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - q(\mathbf{e})$ ,  $\mathbf{e} \in E$  ( $C_q E$  es la llamada *álgebra de Clifford* de  $(E, q)$ ). Como veremos, la forma de los generadores de  $I_q E$  es la que nos permitirá establecer que el producto de  $C_q E$  cumple la regla de contracción.

Las involuciones de paridad y reversión de  $TE$ ,  $x \mapsto \hat{x}$  y  $x \mapsto \tilde{x}$ , dejan invariante el ideal  $I_q E$ , y por consiguiente inducen involuciones de  $C_q E$  que denotamos con los mismos símbolos. Si escribimos  $\bar{x}$  para denotar la imagen de  $x \in TE$  en  $C_q E$ , la involución de paridad es el único automorfismo de  $C_q E$  tal que  $\hat{\bar{e}} = -\bar{e}$  para todo  $\mathbf{e} \in E$  y la reversión es el único antiautomorfismo de  $C_q E$  tal que  $(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_k)^\sim = \bar{x}_k \cdots \bar{x}_1$  para todo  $k \geq 0$  y cualesquiera que sean  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in E$ .

Los cuatro enunciados que siguen aclaran, de una manera elemental, propiedades básicas del álgebra de Clifford (en esencia, la comprobación de las condiciones **A0**) que por lo general se dan por evidentes, no siéndolo, o se remiten a conceptos y construcciones considerablemente más complejos.

Dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ , definamos  $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{x} - 2q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

**LEMA 2.10.** *Si  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  es una base de  $E$ ,  $I_q E$  está generado por  $\tau(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ ,  $j \leq k$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La relación

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \otimes (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} - q(\mathbf{x}) + \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} - q(\mathbf{y}) + \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{x} - 2q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

muestra que  $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} + \mathbf{y} \otimes \mathbf{x} - 2q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in I_q E$ . Se colige de ello que los  $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  generan  $I_q E$ . El aserto se desprende de la bilinealidad y simetría de la función  $\tau$ .  $\square$

LEMA 2.11.  $\bar{1} \neq \bar{0}$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $\bar{1} = \bar{0}$ , tendríamos  $1 \in I_q E$ . Por el lema 2.10, existen  $a_{jk}, b_{jk} \in TE$  tales que  $1 = \sum_{j \leq k} a_{jk} \tau(e_j, e_k) b_{jk}$ . Como en esta relación las componentes de cualquier grado positivo son nulas, podemos suponer que  $a_{jk}$  y  $b_{jk}$  son escalares. Ahora la parte de grado 2 de la relación nos da que  $\sum_{j \leq k} a_{jk} b_{jk} (e_j \otimes e_k + e_k \otimes e_j) = 0$ , de donde  $a_{jk} b_{jk} = 0$  para todo  $j \leq k$ , ya que los tensores  $e_j \otimes e_k + e_k \otimes e_j$  son linealmente independientes. Pero esto lleva a una contradicción cuando consideramos la parte de grado 0:  $1 = -2 \sum_{j \leq k} a_{jk} b_{jk} q(e_j, e_k) = 0$ .  $\square$

Así pues la aplicación  $\mathbb{R} \rightarrow C_q E$ ,  $\lambda \mapsto \lambda \bar{1}$ , es inyectiva, lo cual nos permite identificar  $\mathbb{R}$  al subcuerpo  $\mathbb{R} \bar{1}$  de  $C_q E$ .

LEMA 2.12. Sea  $\bar{E}$  la imagen de  $E$  en  $C_q E$ . Entonces  $\bar{1} \notin \bar{E}$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $\bar{1} = \bar{e}$ , para un cierto  $e \in E$ , la involución de paridad nos da  $\bar{1} = -\bar{e}$  y por tanto la contradicción  $\bar{1} = \bar{0}$ .  $\square$

LEMA 2.13. La sobrección  $E \rightarrow \bar{E}$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x \in E$  tal que  $\bar{x} = 0$  y supongamos que  $e$  es ortogonal. Si  $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ , entonces  $\bar{0} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{e}_n$ . Multiplicando por  $\bar{e}_k$ , obtenemos la relación  $\bar{0} = \sum_j \lambda_j \bar{e}_k \bar{e}_j$  en la que todos los términos cambian de signo por la involución de reversión excepto el  $k$ -ésimo, que es igual a  $\lambda_k \bar{e}_k^2 = \lambda_k q(e_k)$ , de lo cual se desprende que  $\lambda_k = 0$  y, por tanto, que  $x = 0$ .  $\square$

En lo que sigue identificaremos  $E$  con su imagen  $\bar{E}$  en  $C_q E$ .

TEOREMA 2.14.  $(C_q E, E)$  es un álgebra geométrica completa con métrica  $q$ .

DEMOSTRACIÓN. Las condiciones **A0** ya han sido establecidas (lemas 2.11, 2.13 y 2.12).

La regla de contracción **A2**,  $e^2 = q(e)$ , resulta del hecho que  $e \otimes e - q(e) \in I_q E$ . Esto también muestra que  $q$  es la métrica de  $E$  definida por  $C_q E$ , de modo que se satisface **A3**.

Siendo el caso que  $TE$  está generada por  $E$  como una  $\mathbb{R}$ -álgebra, su cociente  $C_q E$  tiene la misma propiedad, de modo que **A1** también se satisface.

Para terminar la demostración, tenemos que probar que  $C_q E$  es completa. Por el teorema 2.7, basta comprobar que  $e_J \notin \mathbb{R}$  si  $|J| > 0$ . Dado que este aserto es claro si  $|J| = 1$  o  $|J| = 2$ , podemos suponer que  $l = |J| \geq 3$ , y en ese caso se puede adaptar con facilidad el argumento de la demostración del lema 2.11 para ver que una relación de la forma  $e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} - \lambda \in I_q(E)$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , implica  $\lambda = 0$  y por tanto lleva al absurdo  $e_J = 0$ .  $\square$

EJEMPLO 2.15 (*Álgebras geométricas incompletas*). Usemos las notaciones introducidas para formular y discutir el axioma **A4** (página 564). Si  $\mathcal{A}$  es un álgebra geométrica incompleta, entonces existe un multiíndice  $L \neq \emptyset$  tal que  $e_L = \epsilon$  ( $\epsilon = \pm 1$ ). Para que se cumpla esta condición, es necesario que  $|L| \geq 3$ . Puesto que



$1 = e_L^2 = (-1)^{|L|//2+s(L)}$ , siendo  $s(L)$  el número de índices  $l \in L$  tales que  $e_l^2 = -1$ , también es necesario que  $|L|//2 + s(L)$  sea par. Además, la regla de conmutación nos da que  $|L \cap J| + |L||J|$  ha de ser par para todo multiíndice  $J$ . En particular tenemos que para que sea  $e_N = \pm 1$  es necesario que  $|J|(1+n)$  sea par para todo  $J$ , es decir,  $n$  ha de ser impar, digamos  $n = 2m+1$  ( $m \geq 1$ ) y  $m+s$  ha de ser par (pues  $s(N) = s$ ). Si esas condiciones se dan, entonces el cociente  $C_q E/(1 - e_N)$ , siendo  $(1 - e_N)$  el ideal bilátero generado por  $1 - e_N$ , resulta ser un álgebra geométrica incompleta de dimensión  $2^{n-1}$ . Para los detalles, y otra serie de ejemplos, véase [13].

### 2.3. LA GRADUACIÓN DE GRASSMANN Y EL PRODUCTO EXTERIOR

Por la proposición 2.9 y el teorema 2.13, para cada signatura  $(r, s)$  existe una única álgebra geométrica completa, salvo isomorfismos. De hecho, si  $(\mathcal{A}, E)$  y  $(\mathcal{A}', E')$  son álgebras geométricas completas con la misma signatura, y  $f : E \rightarrow E'$  una isometría, entonces  $f^\# : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  es un isomorfismo de álgebras.

Podemos pues hablar del álgebra geométrica  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{r,s}$  de signatura  $(r, s)$ . Recordemos que su producto, el *producto geométrico*, se denota por yuxtaposición de sus factores,  $(x, y) \mapsto xy$ . Recordemos también que  $B = \{e_J\}$  denota la base de  $\mathcal{G}$  asociada a una base ortogonal  $e_1, \dots, e_n$  del espacio de vectores  $E$  de  $\mathcal{G}$ . También pondremos  $B^k = \{e_J \mid |J| = k\}$ .

Consideremos la aplicación  $\wedge : E^k \rightarrow \mathcal{G}$  dada por

$$\wedge(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \frac{1}{k!} \sum_J (-1)^{t(J)} \mathbf{x}_{j_1} \cdots \mathbf{x}_{j_k},$$

donde la suma se extiende a todas las permutaciones  $J = [j_1, \dots, j_k]$  de  $\{1, \dots, k\}$ . Esta aplicación es multilineal y alternada, de modo que *existe una única aplicación lineal*  $\mathbf{g} : \wedge^k E \rightarrow \mathcal{G}$  tal que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k) = \wedge(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k).$$

**PROPOSICIÓN 2.16.** *La aplicación  $\mathbf{g} : \wedge^k E \rightarrow \mathcal{G}$  es inyectiva y su imagen es el subespacio vectorial  $\mathcal{G}^k$  generado por  $B^k$ . En particular,  $\mathcal{G}^k$  es independiente de la base  $\mathbf{e}$  usada para definir  $B$  y  $\dim \mathcal{G}^k = \binom{n}{k}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Si los vectores  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  son dos a dos ortogonales, entonces dos cualesquiera de ellos anticonmutan y esto implica que  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k$ . En particular  $\mathbf{g}(e_{\hat{j}}) = e_J$  para cualquier multiíndice  $J$  tal que  $|J| = k$ , y esto prueba los asertos porque  $\{e_{\hat{j}} \mid |J| = k\}$  es una base de  $\wedge^k E$ .  $\square$

Usando  $\mathbf{g}$  para identificar  $\wedge E$  y  $\mathcal{G}$ , obtenemos una *graduación lineal canónica*  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}^n$ , que merece ser llamada *graduación de Grassmann*.

Con la identificación anterior también obtenemos un *producto exterior* en  $\mathcal{G}$ ,  $(x, y) \mapsto x \wedge y$ , que es bilineal, asociativo y anticonmutativo. Tal como se ha establecido en la demostración precedente, las reglas básicas para tratar el producto exterior de  $\mathcal{G}$  son las siguientes, siendo  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in E$ :

1.  $\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k = \wedge(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ .
2. Si  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  son dos a dos ortogonales,  $\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k$ . En particular,  $\mathbf{e}_{\hat{J}} = \mathbf{e}_J$  para todo multiíndice  $J$  si  $\mathbf{e}$  es una base ortogonal de  $E$ .
3.  $\mathbf{e}_J \wedge \mathbf{e}_K = 0$  si  $J \cap K \neq \emptyset$ , y  $\mathbf{e}_J \wedge \mathbf{e}_K = \mathbf{e}_J \mathbf{e}_K$  si  $J \cap K = \emptyset$ .

EJEMPLO 2.17. Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ,  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x})$ . Junto con  $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{x})$ , tenemos  $\mathbf{x}\mathbf{y} = q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ , una combinación fundamental que bien puede ser considerada el certificado de nacimiento del AG.

En general, los elementos de  $\mathcal{G}$  se llaman *multivectores*. Si  $x \in \mathcal{G}$ ,  $x = \sum_J \lambda_J \mathbf{e}_J$ , ponemos  $x_k \in \mathcal{G}^k$  para denotar la componente de  $x$  de grado  $k$ ,  $x_k = \sum_{|J|=k} \lambda_J \mathbf{e}_J$ . Así,  $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$  y esta decomposición es única.

Muchos autores escriben  $\langle x \rangle_k$  en lugar de  $x_k$ , y simplemente  $\langle x \rangle$  para  $\langle x \rangle_0$ .

Los multivectores de  $\mathcal{G}^k$  se llaman *k-vectores*, o *multivectores homogéneos de grado k*. Los multivectores que sólo tienen grados pares forman una subálgebra de  $\mathcal{G}$  (tanto para el producto geométrico como para el producto exterior) que denotamos  $\mathcal{G}^+$  y denominamos (sub)álgebra par.

De los *k-vectores* no nulos de la forma  $\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in E$ , diremos que son *k-aspas* (*k-blades* en inglés). El conjunto de *k-aspas* será denotado  $\mathcal{X}^k$ . Así,  $\mathcal{X}^k \subseteq \mathcal{G}^k$  y  $\mathcal{X} = \sqcup_k \mathcal{X}^k$  es el conjunto de todas las aspas de  $\mathcal{G}$ .

Para  $k = 0, 1, 2, n-1$  y  $n$ , los *k-vectores* reciben nombres particulares: *escalares*, *vectores*, *bivectores*, *pseudovectores* y *pseudoescalares*, respectivamente.

OBSERVACIÓN 2.18. En general,  $\mathcal{X}^k \neq \mathcal{G}^k$ . De hecho  $\mathcal{G}^k$  tiene dimensión  $\binom{n}{k}$  y se puede ver, en un estudio más detallado, que  $\mathcal{X}^k$  es una subvariedad de  $\mathcal{G}^k$  de dimensión  $1 + (n-k)k$ . Para  $n = 4$  y  $k = 2$ , la primera dimensión es 6 y la segunda 5, y éste es el primer caso en que la desigualdad es estricta. Por ejemplo, el bivector  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$  no es una 2-aspas.

Si  $F \subseteq E$  es un subespacio vectorial de dimensión  $k$ , y  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  es una base de  $F$ , entonces el aspa  $X = \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$  se interpreta como un *elemento de volumen* de  $F$ . Si  $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_k$  es otra base de  $F$ , y  $X' = \mathbf{x}'_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}'_k$ , entonces  $X' = \delta X$ , siendo  $\delta$  el determinante de la segunda base respecto de la primera. Esto significa que  $[X'] = [X] \in \mathbf{P}\mathcal{G}^k$ , siendo  $\mathbf{P}\mathcal{G}^k$  el espacio proyectivo de  $\mathcal{G}^k$  y  $[X]$  el punto representado por  $X$ . Llamando  $S_k E$  al conjunto de subespacios de dimensión  $k$  de  $E$ , se tiene pues una aplicación canónica (*aplicación de Plücker*)  $p : S_k E \rightarrow \mathbf{P}\mathcal{G}^k$ , dada por  $F \mapsto p(F) = [X]$ , siendo  $X$  el aspa de una base cualquiera de  $F$ . La imagen de  $p$  es  $\mathbf{P}\mathcal{X}^k$ , el subconjunto de  $\mathbf{P}\mathcal{G}^k$  de puntos representados por aspas.

PROPOSICIÓN 2.19. La aplicación  $p : S_k E \rightarrow \mathbf{P}\mathcal{X}^k$  es biyectiva.

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que un elemento de volumen  $X$  cualquiera de  $F$  determina  $F$ , ya que  $\mathbf{x} \in F$  equivale a  $\mathbf{x} \wedge X = 0$ .  $\square$

La biyección  $p$  nos permite identificar el punto  $[X]$  definido por un aspa  $X$  con el subespacio  $F = \{\mathbf{x} \in E \mid \mathbf{x} \wedge X = 0\}$ . De este modo la relación  $\mathbf{x} \wedge X = 0$  es equivalente a  $\mathbf{x} \in [X]$ .

EJEMPLO 2.20. Sea  $\mathcal{G}_2$  el álgebra geométrica del plano euclídeo  $E_2$  y  $\bar{\mathcal{G}}_2$  del plano *antieuclydeo*  $E_{\bar{2}}$  (su métrica es  $\bar{q} = -q$  si  $q$  es la métrica de  $E_2$ ).

Sea  $e_1, e_2$  una base *ortonormal* de  $E_2$ . La correspondiente base de  $\mathcal{G}_2$  (y de  $\bar{\mathcal{G}}_2$ ) es  $1, e_1, e_2, e_{12} = i$  ( $i$  representa la *unidad de área*). No obstante, las tablas del producto geométrico son muy distintas:

$\mathcal{G}_2$	$e_1$	$e_2$	$i$	$\bar{\mathcal{G}}_2$	$e_1$	$e_2$	$i$
$e_1$	1	$i$	$e_2$	$e_1$	-1	$i$	$-e_2$
$e_2$	$-i$	1	$-e_1$	$e_2$	$-i$	-1	$e_1$
$i$	$-e_2$	$e_1$	-1	$i$	$e_2$	$-e_1$	-1

En ambos casos el álgebra par es  $\langle 1, i \rangle \simeq \mathbb{C}$  (el isomorfismo es  $\alpha + \beta i \mapsto \alpha + \beta i$ ). Esto confiere un significado geométrico a  $\mathbf{C} = \langle 1, i \rangle$ , y en particular a  $i$ , que clarifica y enriquece la interpretación clásica: el espacio de vectores  $E_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$  y el de los «números complejos»  $\mathbf{C} = \langle 1, i \rangle$  son suplementarios en  $\mathcal{G}_2$ , y no confundidos como suele ser la regla. La naturaleza «geométrica» de  $i$  se manifiesta, por ejemplo, en que  $x \mapsto xi$  es la rotación de  $E_2$  de amplitud  $\pi/2$  en el sentido antihorario según la orientación dada por  $e$ . Más generalmente, la aplicación  $x \mapsto x(\cos \theta + i \sin \theta) = xe^{\theta i}$  es la rotación de  $E_2$  de amplitud  $\theta$ , también en sentido antihorario. La rotación en sentido horario de amplitud  $\theta$  es  $x \mapsto xe^{-\theta i} = e^{\theta i}x$ , pues  $i$  *anticommuta* con los vectores.

EJEMPLO 2.21. Sea  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_3$  el álgebra geométrica del espacio euclídeo  $E_3$  (*álgebra de Pauli*). Sea  $e_1, e_2, e_3$  una *base ortonormal* e  $i = e_{123} = e_1 e_2 e_3$  (*unidad de volumen*). Nótese que  $ie_1 = e_2 e_3, ie_2 = e_3 e_1, ie_3 = e_1 e_2$  es una base de  $\mathcal{G}^2$ . La tabla del producto geométrico usando esta base es

$\mathcal{G}_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$ie_1$	$ie_2$	$ie_3$	$i$
$e_1$	1	$ie_3$	$-ie_2$	$i$	$-e_3$	$e_2$	$ie_1$
$e_2$	$-ie_3$	1	$ie_1$	$e_3$	$i$	$-e_1$	$ie_2$
$e_3$	$ie_2$	$-ie_1$	1	$-e_2$	$e_1$	$i$	$ie_3$
$ie_1$	$i$	$-e_3$	$e_2$	-1	$-ie_3$	$ie_2$	$-e_1$
$ie_2$	$e_3$	$i$	$-e_1$	$ie_3$	-1	$-ie_1$	$-e_2$
$ie_3$	$-e_2$	$e_1$	$i$	$-ie_2$	$ie_1$	-1	$-e_3$
$i$	$ie_1$	$ie_2$	$ie_3$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	-1

Vemos que  $\mathbf{C} = \langle 1, i \rangle$  es el centro de  $\mathcal{G}$ . También constatamos que la subálgebra par  $\mathbf{H} = \mathcal{G}^+ = \langle 1, ie_1, ie_2, ie_3 \rangle$  es isomorfa al cuerpo de los cuaternios  $\mathbb{H} = \langle 1, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K} \rangle$ , vía el isomorfismo lineal dado por  $1, ie_1, ie_2, ie_3 \mapsto 1, \mathbf{K}, \mathbf{J}, \mathbf{I}$ . Como en el caso del plano, estos hechos ponen de manifiesto aspectos geométricos de  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{H}$  que permanecen ocultos en las presentaciones usuales de  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$ . Volveremos sobre estas cuestiones en la sección siguiente.

## 2.4. ÁLGEBRA DE GRASSMANN MÉTRICA

La métrica  $q$  de  $E$  induce una métrica en  $\wedge E$  y, vía la identificación  $\wedge E \simeq \mathcal{G}$  como espacios vectoriales graduados, una métrica en  $\mathcal{G}$ , que seguiremos denotando

con el mismo símbolo  $q$ .<sup>2</sup> Respecto de esta métrica,  $\mathcal{G}^k$  y  $\mathcal{G}^l$  son ortogonales si  $k \neq l$ , mientras que para  $k$ -aspas  $X = \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$  e  $Y = \mathbf{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_k$  se tiene

$$q(X, Y) = G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k),$$

siendo  $G = G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$  el *determinante de Gram*

$$G = \begin{vmatrix} q(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) & \cdots & q(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ q(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1) & \cdots & q(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \end{vmatrix}.$$

En particular,

$$q(X) = G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k),$$

donde  $G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$  adopta la forma

$$G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \begin{vmatrix} q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \cdots & q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ q(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1) & \cdots & q(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k) \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 2.22. Si  $q$  es una métrica euclídea, entonces

$$G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)^2,$$

siendo  $V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$  el  $k$ -volumen del paralelepípedo definido por  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ . En particular vemos que la métrica de  $\mathcal{G}$  es euclídea. La fórmula es cierta para  $k = 1$ , ya que el 1-volumen de  $\mathbf{x}_1$  es  $|\mathbf{x}_1|$  y  $|\mathbf{x}_1|^2 = q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)$ . Para  $k > 1$ , se puede proceder por inducción para mostrar que la fórmula es cierta cuando  $\mathbf{x}_k$  es ortogonal a  $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1} \rangle$ . Finalmente se puede mostrar que la fórmula es cierta en general descomponiendo  $\mathbf{x}_k$  como una suma  $\mathbf{x}'_k + \mathbf{x}''_k$  con  $\mathbf{x}'_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1} \rangle$  y  $\mathbf{x}''_k \in \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1} \rangle^\perp$ .

## 2.5. EL PRODUCTO INTERIOR

El *producto interior* de  $\mathcal{G}$  se define en términos de la métrica  $q$  y del producto exterior y se denota  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ . Dado que es bilineal, basta definirlo cuando  $x$  e  $y$  son homogéneos, digamos  $x \in \mathcal{G}^k$  e  $y \in \mathcal{G}^l$ , o incluso cuando  $x$  e  $y$  son aspas  $X = \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$  e  $Y = \mathbf{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_l$ . El caso básico es para  $k = 1$  ( $X = \mathbf{x}_1 = \mathbf{e} \in E$ ), que se define como la *contracción* (por la izquierda) de  $\mathbf{e}$  con  $Y$ :

$$\mathbf{e} \cdot Y = \delta_{\mathbf{e}}(Y) = \sum_{j=1}^l (-1)^{j-1} q(\mathbf{e}, \mathbf{y}_j) Y_j, \quad (1)$$

siendo  $Y_j = \mathbf{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_{j-1} \wedge \mathbf{y}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_l$ .

---

<sup>2</sup>Si vemos  $q$  como una aplicación lineal  $q: E \rightarrow E^*$ ,  $q(e)(e') = q(e, e')$ , entonces tenemos una aplicación lineal  $q^\wedge: \wedge E \rightarrow \wedge(E^*) = \wedge(E)^*$  y la correspondiente métrica  $q^\wedge(x, y) = q^\wedge(x)(y)$ .

La propiedad fundamental del operador  $\delta_e$  (frecuentemente denotado  $i_e$ ) es que es una *antiderivación* de grado  $-1$  del producto exterior: si  $x$  e  $y$  son multivectores, entonces (*regla de Leibniz*)

$$\delta_e(x \wedge y) = \delta_e(x) \wedge y + \widehat{x} \wedge \delta_e(y).$$

El caso  $l = 1$  ( $Y = \mathbf{y}_1 = \mathbf{e}$ ) se define de un modo similar, pero utilizando la *contracción por la derecha* de  $\mathbf{e}$  con  $X$ , lo cual es equivalente a  $(-1)^{k+1} \mathbf{e} \cdot X$ .

Nótese, en particular, que si  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  son vectores, entonces las dos definiciones dan el mismo resultado:  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Así pues, exceptuando el caso  $k = l = 0$  que consideraremos después, podemos suponer que  $k, l \geq 2$ , y en tal caso la definición es por recurrencia:

$$(\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_l) = \begin{cases} (\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{k-1}) \cdot (\mathbf{x}_k \cdot Y), & \text{si } k \leq l, \\ (X \cdot \mathbf{y}_1) \cdot (\mathbf{y}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_l), & \text{si } k \geq l. \end{cases} \quad (2)$$

De hecho, es fácil ver, usando la definición para  $l = 1$  e inducción, que el caso  $k \leq l$  es suficiente para evaluar cualquier producto interior, ya que

$$X \cdot Y = (-1)^{kl+l} Y \cdot X \quad (3)$$

cuando  $k \geq l$ .

En particular vemos que *el producto interior es simétrico cuando  $k = l$* . Más generalmente, es simétrico si y sólo si  $k$  y  $l$  tienen la misma paridad o cuando el menor de los dos grados es par. En cualquier otro caso es antisimétrico.

Para un vector  $\mathbf{e}$  y un escalar  $\lambda$ , hemos visto que se cumple la relación  $\mathbf{e} \cdot \lambda = 0$  (y por tanto también  $\lambda \cdot \mathbf{e} = 0$ ). Usando las reglas recursivas, obtenemos que  $\mathbf{x} \cdot \lambda = 0$  (y en consecuencia también  $\lambda \cdot \mathbf{x} = 0$ ) para cualquier  $k$ -vector  $\mathbf{x}$ ,  $k > 0$ . Así que hemos definido todos los casos excepto el del producto interior de dos escalares, que definimos como 0 a fin de que  $\mathbf{x} \cdot \lambda = \lambda \cdot \mathbf{x} = 0$  para cualquier multivector  $\mathbf{x}$  y cualquier escalar  $\lambda$ .

**PROPOSICIÓN 2.23.** *Si  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$  cumple  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} = 0$  para todo vector  $\mathbf{e}$ , entonces  $\mathbf{x}$  es un escalar.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  una base ortogonal y escribamos  $\mathbf{x} = \sum_J \lambda_J \mathbf{e}_J$ . Dado que la hipótesis implica que  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ , y  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_J = q(\mathbf{e}_1) \mathbf{e}_{J-\{\mathbf{e}_1\}}$  si  $1 \in J$ , y  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_J = 0$  si  $1 \notin J$ , obtenemos que  $\lambda_J = 0$  si  $1 \in J$ . Como consecuencia,  $\mathbf{e}_1$  no aparece en el desarrollo de  $\mathbf{x}$ . Procediendo de modo análogo con los demás índices, podemos concluir que  $\mathbf{e}_k$  no aparece en dicho desarrollo para ningún  $k$ , es decir,  $\mathbf{x} = x_0 \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**EJEMPLO 2.24.** Sea  $X$  una  $k$ -aspa e  $Y$  una  $l$ -aspa. Entonces  $X \cdot Y = 0$  si uno de los factores de  $X$  es ortogonal a todos los factores de  $Y$  o uno de los factores de  $Y$  es ortogonal a todos los factores de  $X$ .

## 2.6. INVOLUCIONES

La *involución de paridad* de  $\mathcal{G}$ ,  $x \mapsto \widehat{x}$ , se ha definido en la página 565. Es un automorfismo del álgebra geométrica:

$$\widehat{xy} = \widehat{x}\widehat{y}$$

cualesquiera que sean  $x, y \in \mathcal{G}$ . Preserva grados y, de hecho,  $\widehat{x} = (-1)^k x$  para todo  $k$ -vector  $x$ . Esto implica, de modo inmediato, que la involución de paridad es un automorfismo del producto exterior,

$$\widehat{x \wedge y} = \widehat{x} \wedge \widehat{y}.$$

Es también un automorfismo del producto interior,

$$\widehat{x \cdot y} = \widehat{x} \cdot \widehat{y}.$$

En efecto, podemos suponer que  $x \in \mathcal{G}^k$  e  $y \in \mathcal{G}^l$ , y en esa situación la igualdad es equivalente a decir que  $|k-l|$  y  $k+l$  tienen la misma paridad, lo cual es claramente cierto.

La *involución de reversión* de  $\mathcal{G}$  se ha definido en la página 565 y es un antiautomorfismo del producto geométrico:

$$\widetilde{xy} = \widetilde{y}\widetilde{x}.$$

LEMA 2.25. *La involución de reversión coincide con el automorfismo lineal graduado de  $\mathcal{G}$  que sobre los  $k$ -vectores es la multiplicación por  $\epsilon_k = (-1)^{\binom{k}{2}} = (-1)^{k//2}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que coinciden sobre productos  $\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k$  de vectores ortogonales dos a dos, lo cual por otra parte es claro ya que, en este caso,  $\mathbf{x}_k \cdots \mathbf{x}_1 = \epsilon_k \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 2.26. *La involución de reversión es también un antiautomorfismo del productor exterior y del producto interior:*

$$\widetilde{x \wedge y} = \widetilde{y} \wedge \widetilde{x}, \quad \widetilde{x \cdot y} = \widetilde{y} \cdot \widetilde{x}.$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que  $x \in \mathcal{G}^k$  e  $y \in \mathcal{G}^l$ . En este caso la igualdad para el producto exterior es equivalente a decir que  $(k+l)//2$  y  $k//2 + l//2 + kl$  tienen la misma paridad, lo cual se comprueba sin dificultad.

La igualdad para el producto interior es equivalente a decir que  $|k-l|//2$  y  $l//2 + k//2 + kl + \min(k, l)$  tienen la misma paridad, lo cual se puede también comprobar sin mucha dificultad.  $\square$

## 2.7. ALGUNAS FÓRMULAS PRIMORDIALES

En este apartado recopilamos una selección de fórmulas que facilitan el manejo del álgebra geométrica.

PROPOSICIÓN 2.27. Para todo  $e \in E$  y  $x \in \mathcal{G}$ ,

$$ex = e \cdot x + e \wedge x = (\delta_e + \mu_e)(x),$$

siendo  $\mu_e : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  el operador lineal dado por la expresión  $\mu_e(x) = e \wedge x$ .

DEMOSTRACIÓN. Como ambos miembros de la igualdad son expresiones bilineales de  $e$  y  $x$ , basta comprobarla para  $e = e_k$  y  $x = e_J$ ,  $k \in N$  y  $J$  un multiíndice. Si  $k \notin J$ ,  $e_k \cdot e_J = 0$  y  $e_k e_J = e_k \wedge e_J$ . Si  $k \in J$ , entonces  $e_k \wedge e_J = 0$  y  $e_k e_J = (-1)^{t(k,J)} q(e_k) e_{J-\{k\}} = e_k \cdot e_J$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 2.28. Para todo  $e \in E$  y  $x \in \mathcal{G}$ ,  $xe = x \cdot e + x \wedge e$ .

DEMOSTRACIÓN.  $xe = (e\tilde{x})^\sim = (e \cdot \tilde{x} + e \wedge \tilde{x})^\sim = x \cdot e + x \wedge e$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 2.29 (Fórmulas de Riesz).  $2e \wedge x = ex + \widehat{xe}$  y  $2e \cdot x = ex - \widehat{xe}$ .

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta que  $x \cdot e = -e \cdot \widehat{x}$  y  $x \wedge e = e \wedge \widehat{x}$ , podemos escribir  $xe = -e \cdot \widehat{x} + e \wedge \widehat{x}$ . Para  $\widehat{x}$ , esta igualdad da  $\widehat{xe} = -e \cdot x + e \wedge x$ , y ésta, junto con  $xe = e \cdot x + e \wedge x$ , claramente nos proporciona las fórmulas enunciadas.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.30. Para todo vector  $e$ , el operador  $\delta_e$  es una antiderivación del producto geométrico:  $\delta_e(xy) = (\delta_e x)y + \widehat{x}(\delta_e y)$ .

DEMOSTRACIÓN. La única antiderivación del álgebra tensorial  $TE$  tal que  $\delta_e(e') = q(e, e')$  ( $e' \in E$ ) anula los generadores del ideal  $I_q E$  y así  $\delta_e I_q E \subseteq I_q E$ . Se infiere que  $\delta_e$  induce una antiderivación de  $C_q E$  y a fortiori del producto geométrico.  $\square$

TEOREMA 2.31 (Grados de un producto geométrico). Sean  $x \in \mathcal{G}^k$ ,  $y \in \mathcal{G}^l$ . Si  $p \in \{0, 1, \dots, n\}$  y  $(xy)_p \neq 0$ , entonces  $p = |k - l| + 2i$  con  $i \geq 0$  y  $p \leq r + s$ . Además,  $(xy)_{k+l} = x \wedge y$  y si  $k, l > 0$ ,  $(xy)_{|k-l|} = x \cdot y$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $(xy)_p$  depende linealmente de  $x$ , podemos suponer que  $x$  es una  $k$ -aspa, digamos  $X = \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k$ , y que  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  es una base ortonormal de  $[X] = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle$ . De este modo  $X = \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k$  y, usando la proposición 2.27,

$$xy = (\mu_{\mathbf{x}_1} + \delta_{\mathbf{x}_1}) \cdots (\mu_{\mathbf{x}_k} + \delta_{\mathbf{x}_k})(y).$$

Si en el desarrollo del segundo miembro escogemos  $i$  veces el sumando  $\mu$ , y por tanto  $k-i$  veces  $\delta$ , obtenemos un multivector de grado  $l+i-(k-i) = l-k+2i$ . El máximo grado que podemos formar de este modo es  $k+l$  (con  $i = k$ ) y el correspondiente término es  $x \wedge y$ .

Si  $0 < k \leq l$ , el mínimo grado que podemos obtener es  $l-k$  (con  $i = 0$ ), y el correspondiente término es  $x \cdot y$  (por la regla recursiva (2)).

Si  $k \geq l > 0$ , el mínimo grado en  $xy$  es el mínimo grado que aparece en  $\widetilde{xy} = \widetilde{y}\widetilde{x}$ , que es  $k-l$ , y el correspondiente término es  $((\widetilde{y}\widetilde{x})_{k-l})^\sim = (\widetilde{y} \cdot \widetilde{x})^\sim = x \cdot y$ .  $\square$

La fórmula (3) nos dice que, a fin de obtener una expresión para el producto interior  $X \cdot Y$  de dos aspas, basta considerar el caso  $k \leq l$ . En tal caso se tiene:

TEOREMA 2.32 (Regla de Laplace).

$$X \cdot Y = \sum_J (-1)^{t(J, J')} (X \cdot Y_J) Y_{J'} = \sum_J (-1)^{t(J, J')} q(\tilde{X}, Y_J) Y_{J'},$$

donde la suma se extiende a todos los multiíndices  $J \subseteq \{1, \dots, l\}$  de grado  $k$ ,  $J' = \{1, \dots, s\} - J$  e  $Y_L$  es el producto exterior de los factores de  $Y$  con índice en  $L$ .

DEMOSTRACIÓN. Para  $k = 1$ , la fórmula coincide con (1) y, para  $k > 1$ , podemos usar la regla recursiva (2) e inducción. Para los detalles del cálculo, véase [13].  $\square$

En el caso  $k = l$ , el producto interior se puede expresar en términos de la métrica, y viceversa:

PROPOSICIÓN 2.33 (Fórmulas métricas). Si  $x, y \in \mathcal{G}^k$ ,  $x \cdot y = q(\tilde{x}, y)$ ,  $q(x, y) = \tilde{x} \cdot y$ .

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia directa de la bilinealidad (del producto interior y de la métrica) y de la regla de Laplace para el producto interior de dos  $r$ -aspas.  $\square$

COROLARIO 2.34 (Norma métrica). Si  $x \in \mathcal{G}^k$ ,  $q(x) = \tilde{x} \cdot x = (-1)^{k//2} x \cdot x$ .

PROPOSICIÓN 2.35 (Forma alternativa de la métrica).  $q(x, y) = (\tilde{x}y)_0 = (x\tilde{y})_0$  cualesquiera que sean  $x, y \in \mathcal{G}$ .

DEMOSTRACIÓN. Siendo ambas expresiones bilineales, podemos suponer que  $x$  e  $y$  son homogéneos. Sean  $k$  y  $l$  sus respectivos grados. Entonces el teorema 2.31 nos dice que  $(\tilde{x}y)_0 = (x\tilde{y})_0 = 0$  si  $k \neq l$ , lo cual coincide con  $q(x, y)$ , ya que esta expresión también es nula. Así que podemos suponer  $k = l$ , y en este caso el teorema 2.31 nos dice que  $(\tilde{x}y)_0 = \tilde{x} \cdot y$ . Ahora la proposición 2.33 nos permite concluir que  $\tilde{x} \cdot y = q(x, y)$ . Finalmente,  $q(x, y) = q(y, x) = \tilde{y} \cdot x = x \cdot \tilde{y} = (x\tilde{y})_0$ .  $\square$

COROLARIO 2.36. Para todo  $x \in \mathcal{G}$ ,  $q(x) = (\tilde{x}x)_0 = (x\tilde{x})_0$ .

COROLARIO 2.37. Si  $X \in \mathcal{X}^k$ ,  $q(X) = \tilde{X}X = X\tilde{X} = (-1)^{k//2} X^2$ .

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario anterior es suficiente ver que  $\tilde{X}X$  es un escalar. Para ello podemos suponer, tomando una base ortogonal  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$  del subespacio  $[X]$  definido por  $X$ , que  $X = \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k$ , y en ese caso  $\tilde{X}X = \mathbf{x}_1^2 \cdots \mathbf{x}_k^2 \in \mathbb{R}$ .  $\square$

COROLARIO 2.38. Sean  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in E$  y pongamos  $X = \mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_k$ . Entonces  $X$  es invertible si y sólo si  $X^2 \neq 0$ , o si y sólo si  $q(X) \neq 0$ , y en ese caso  $X^{-1} = X/X^2 = \tilde{X}/q(X)$ . Nótese también que la condición  $q(X) \neq 0$  equivale a decir que el subespacio  $[X] = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle$  es no singular.



## 2.8. PSEUDOESCALARES

Sea  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  una base ortonormal de  $E = E_{r,s}$  y definamos

$$\mathbf{i}_{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n \in \mathcal{G}^n.$$

Diremos que  $\mathbf{i}_{\mathbf{e}}$  es el *pseudoescalar* asociado a  $\mathbf{e}$ . Nótese que la fórmula métrica nos da que

$$q(\mathbf{i}_{\mathbf{e}}) = q(\mathbf{e}_1) \cdots q(\mathbf{e}_n) = (-1)^s.$$

Si  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$  es otra base ortonormal de  $E$ , entonces

$$\mathbf{i}_{\mathbf{e}'} = \delta \mathbf{i}_{\mathbf{e}},$$

siendo  $\delta = \det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}')$  el determinante de la matriz de los vectores  $\mathbf{e}'$  respecto de la base  $\mathbf{e}$ . Ahora las igualdades  $q(\mathbf{i}_{\mathbf{e}}) = q(\mathbf{i}_{\mathbf{e}'}) = q(\delta \mathbf{i}_{\mathbf{e}}) = \delta^2 q(\mathbf{i}_{\mathbf{e}})$  nos permiten concluir que  $\delta = \pm 1$ . Esto significa que, salvo un signo, existe un único pseudoescalar. La distinción de uno de los dos pseudoescales es equivalente a escoger una orientación del espacio  $E$ .

**TEOREMA 2.39.** *Sea  $\mathbf{i} \in \mathcal{G}^n$  un pseudoescalar y  $\mathcal{G}^\times$  el grupo de multivectores invertibles respecto del producto geométrico. Entonces:*

1.  $\mathbf{i} \in \mathcal{G}^\times$ ,  $\mathbf{i}^{-1} = (-1)^s \widetilde{\mathbf{i}} = (-1)^s (-1)^{n//2} \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i}^2 = (-1)^{n//2} (-1)^s$ .
2. Dualidad de Hodge. Para todo  $x \in \mathcal{G}^k$ ,  $\mathbf{i}x, x\mathbf{i} \in \mathcal{G}^{n-k}$  y las aplicaciones  $x \mapsto \mathbf{i}x$  y  $x \mapsto x\mathbf{i}$  son isomorfismos lineales  $\mathcal{G}^k \rightarrow \mathcal{G}^{n-k}$ . Las aplicaciones inversas son las aplicaciones  $x \mapsto \mathbf{i}^{-1}x$  y  $x \mapsto x\mathbf{i}^{-1}$ , respectivamente.
3. Si  $n$  es impar,  $\mathbf{i}$  conmuta con todos los elementos de  $\mathcal{G}$  (esto se suele expresar diciendo que  $\mathbf{i}$  es un elemento central de  $\mathcal{G}$ ).
4. Si  $n$  es par,  $\mathbf{i}$  conmuta (anticonmuta) con los multivectores pares (impares).
5. Si  $q(\mathbf{i}) = 1$  ( $q(\mathbf{i}) = -1$ ), los isomorfismos de la dualidad de Hodge son isometrías (antiisometrías).

**DEMOSTRACIÓN.** 1. Siendo  $(-1)^s = q(\mathbf{i}) = \widetilde{\mathbf{i}}\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i} \in \mathcal{G}^\times$ ,  $\mathbf{i}^{-1}$  viene dado por la fórmula del enunciado, y de ello se desprende inmediatamente el valor de  $\mathbf{i}^2$ .

2. Dado que  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_N$ , la proposición 2.3 da  $\mathbf{e}_J \mathbf{i}, \mathbf{i} \mathbf{e}_J \in \mathcal{G}^{n-k}$  para todo multiíndice  $J$  de orden  $k$ .

3 y 4. La regla de conmutación de la proposición 2.4 da

$$\mathbf{e}_j \mathbf{i} = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_N = (-1)^{n+1} \mathbf{e}_N \mathbf{e}_j = (-1)^{n+1} \mathbf{i} \mathbf{e}_j,$$

así que  $\mathbf{i}$  conmuta (anticonmuta) con todos los vectores si  $n$  es impar (si  $n$  es par).

5. Si  $x, y \in \mathcal{G}^k$ , la definición alternativa de la métrica da

$$q(x\mathbf{i}, y\mathbf{i}) = \left( x\mathbf{i} \widetilde{y\mathbf{i}} \right)_0 = (x\mathbf{i} \widetilde{y})_0 = (xq(\mathbf{i})\widetilde{y})_0 = q(\mathbf{i})q(x, y).$$

Que  $q(\mathbf{i}x, \mathbf{i}y) = q(\mathbf{i})q(x, y)$  se muestra de modo similar usando que

$$\widetilde{\mathbf{i}x} \mathbf{i}y = \widetilde{x\mathbf{i}} \widetilde{y} = \widetilde{x} q(\mathbf{i}) y = q(\mathbf{i}) \widetilde{x} y.$$

□

### 3. GEOMETRÍA CON AG

Pongamos  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{r,s}$  para denotar el álgebra geométrica completa de signatura  $(r, s)$ ,  $n = r + s$ . En ella conviven y se interrelacionan la graduación de Grassmann  $G = G^0 \oplus G^1 \oplus G^2 \oplus \cdots \oplus G^n$  y los productos geométrico  $xy$ , exterior  $x \wedge y$  e interior  $x \cdot y$ . Recordemos que el *álgebra par*  $\mathcal{G}^+$  está formada por los multivectores que sólo contienen componentes de grados pares. Es una subálgebra para los tres productos.

Recordemos también que  $\mathcal{G}^\times$  es el grupo de los multivectores invertibles respecto del producto geométrico. Está claro que  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$  es un subgrupo de  $\mathcal{G}^\times$ . Puesto que un vector es invertible si y sólo si es no isótropo,  $\mathcal{G}^\times$  también contiene el conjunto  $E^\times$  formado por dichos vectores. Por el corolario 2.38 sabemos que un aspa  $X$  es invertible si y sólo si  $X^2 \neq 0$ , o si y sólo si  $q(X) \neq 0$  (en cuyo caso decimos que es *no isótropa*).

#### 3.1. GRUPO ORTOGONAL

Con la operación de composición, el conjunto de  $q$ -isometrías de  $E$  forma un grupo que denotamos  $O_q(E)$ : es el *grupo ortogonal* de  $q$ , o de  $(E, q)$ . También se denota  $O_{r,s}$  si se quiere poner de manifiesto la signatura, o simplemente  $O_n$  en el caso del espacio euclídeo  $E_n$ .

Dada una isometría  $f \in O_q(E)$ , existe un único automorfismo de  $\mathcal{G}$  que coincide con  $f$  en  $E$ . Este automorfismo es una isometría de  $\mathcal{G}$  (por la proposición 2.35), de modo que  $q(fx) = q(x)$  para todo  $x \in \mathcal{G}$ . Si  $i$  es un pseudoescalar no nulo, entonces  $q(i) = q(f(i)) = q(\det(f)i) = \det(f)^2 q(i)$ , de donde  $\det(f) = \pm 1$ . Sea  $SO_q(E)$  el subgrupo de  $O_q(E)$  formado por las isometrías *propias*, esto es, isometrías  $f$  tales que  $\det(f) = 1$ . Es el *grupo ortogonal especial* de  $q$ , que también denotamos  $SO_{r,s}$  (o  $SO_n$  en el caso del espacio euclídeo) si se quiere especificar la signatura.

**PROPOSICIÓN 3.1** (Simetrías axiales y reflexiones). *Si  $u$  es un vector no isótropo, la aplicación  $s_u : E_{r,s} \rightarrow E_{r,s}$ ,  $x \mapsto uxu^{-1}$  es la simetría axial de eje  $\langle u \rangle$ . Como consecuencia,  $m_u = -s_u : E \rightarrow E$  es la reflexión en la dirección  $\langle u \rangle$ , o en el hiperplano  $u^\perp$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Puesto que  $uu^{-1} = 1$ ,  $s_u(u) = u$ . Si  $x \in u^\perp$ , entonces  $u$  y  $x$  anticonmutan y por tanto  $s_u(x) = uxu^{-1} = -xuu^{-1} = -x$ . Vemos así que  $s_u$  es la aplicación lineal que deja  $u$  invariante y que opera como  $-\text{Id}$  en  $u^\perp$ , lo cual coincide con la especificación de la simetría axial de eje  $\langle u \rangle$ . Es entonces claro que  $m_u = -s_u$  es la reflexión del enunciado, ya que transforma  $u$  en  $-u$  y es la identidad en  $u^\perp$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 3.2.** Para todo escalar no nulo  $\lambda$ ,  $u$  y  $\lambda u$  definen la misma simetría axial (o reflexión). Tomando  $\lambda = 1/|u|$ , en cuyo caso  $q(\lambda u) = u^2/|u|^2 = \epsilon_u$ , vemos que se puede siempre suponer que el vector  $u$  usado para definir una simetría axial (o reflexión) es unitario.

### 3.2. VERSORES

Un *versor* es un elemento  $v \in \mathcal{G}^\times$  que se puede expresar como un producto de vectores no isotropos (esto es, vectores invertibles):  $v = \mathbf{u}_k \cdots \mathbf{u}_1$ . El conjunto de todos los versores  $V = V_q(E) = V_{r,s}$  forma un subgrupo de  $\mathcal{G}^\times$ . En efecto, está claro que el producto de dos versores es un versor, que 1 es un versor (de hecho cualquier escalar no nulo  $\lambda$  es un versor, pues  $\lambda = (\lambda \mathbf{u}) \mathbf{u}^{-1}$  para todo vector invertible  $\mathbf{u}$ ) y que el inverso del versor  $v$  es  $v^{-1} = \mathbf{u}_1^{-1} \cdots \mathbf{u}_k^{-1}$ . Dado que  $v\tilde{v} = q(v) = \mathbf{u}_1^2 \cdots \mathbf{u}_k^2 \neq 0$ , se tiene que  $v^{-1} = \tilde{v}/q(v)$ .

**PROPOSICIÓN 3.3.** *Dado un versor  $v$ , la aplicación  $\underline{v} : E \rightarrow E$ ,  $\underline{v}(\mathbf{x}) = \widehat{v}\mathbf{x}v^{-1}$ , es una isometría de  $E$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** En efecto:

$$\begin{aligned}\widehat{v}\mathbf{x}v^{-1} &= (-1)^k \mathbf{u}_k \cdots \mathbf{u}_1 \mathbf{x} \mathbf{u}_1^{-1} \cdots \mathbf{u}_k^{-1} = -\mathbf{u}_k (\cdots (-\mathbf{u}_1 \mathbf{x} \mathbf{u}_1) \cdots) \mathbf{u}_k^{-1} \\ &= m_{\mathbf{u}_k} (\cdots (m_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x})) \cdots) = (m_{\mathbf{u}_k} \cdots m_{\mathbf{u}_1})(\mathbf{x})\end{aligned}$$

y por consiguiente  $\underline{v} = m_{\mathbf{u}_k} \cdots m_{\mathbf{u}_1}$ , que es una isometría.  $\square$

**EJEMPLO 3.4.** Sea  $\mathbf{i} \in \mathcal{G}^n$  un pseudoescalar. Entonces  $\mathbf{i} \in V$  y la isometría  $\underline{\mathbf{i}}$  es la identidad  $\text{Id}$  si  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  y  $-\text{Id}$  si  $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$ .

**TEOREMA 3.5** (Representación adjunta con signo). *La aplicación  $\tilde{\rho} : V_{r,s} \rightarrow \text{O}_{r,s}$  dada por  $v \mapsto \underline{v}$  es un homomorfismo sobreyectivo y su núcleo es  $\mathbb{R}^\times$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Es un homomorfismo porque si  $v$  y  $w$  son versores, entonces

$$\underline{wv}(\mathbf{x}) = \widehat{wv}(\mathbf{x})(wv)^{-1} = \widehat{w}\widehat{v}\mathbf{x}v^{-1}w^{-1} = \underline{w}(\underline{v}(\mathbf{x})),$$

lo cual muestra que  $\underline{wv} = \underline{w}\underline{v}$ .

Que es sobreyectivo es una consecuencia directa del teorema de Cartan-Dieudonné que asegura que toda isometría es un producto de, como mucho,  $n$  reflexiones.

Como  $\underline{\lambda}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \lambda^{-1} = \mathbf{x}$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ , es claro que  $\mathbb{R}^\times$  está contenido en el núcleo de  $\tilde{\rho}$ . Falta ver que todo elemento  $v$  del núcleo de  $\tilde{\rho}$  es un escalar. En otras palabras, queremos ver que si para todo vector  $\mathbf{e}$  se cumple  $\widehat{v}\mathbf{e}v^{-1} = \mathbf{e}$ , lo que es decir  $\widehat{v}\mathbf{e} = \mathbf{e}v$ , entonces  $v$  es un escalar. A tal fin, notemos que las fórmulas de Riesz implican que esta relación es equivalente a decir que  $\mathbf{e} \cdot v = (\mathbf{e}v - \widehat{v}\mathbf{e})/2 = 0$  para todo  $\mathbf{e} \in E$ , y esto conlleva (proposición 2.23) que  $v$  es un escalar.  $\square$

**COROLARIO 3.6.** *Consideremos el subgrupo  $V^+ = V_{r,s}^+$  de  $V_{r,s}$  formado por los elementos pares de  $V_{r,s}$ . Para todo  $v \in V^+$ ,  $\underline{v}$  es el producto de un número par de reflexiones y por tanto pertenece a  $\text{SO}_{r,s}$ . La aplicación  $\tilde{\rho} : V_{r,s}^+ \rightarrow \text{SO}_{r,s}$  es sobreyectiva (de nuevo por el teorema de Cartan-Dieudonné) y su núcleo es  $\mathbb{R}^\times$ .*

### 3.3. PINORES, ESPINORES Y ROTORES

$\text{Pin} = \text{Pin}_{r,s}$  se define como el subgrupo de  $V$  formado por los versores unitarios, es decir, los versores  $v$  tales que  $q(v) = \pm 1$  o, equivalentemente,  $v\tilde{v} = \pm 1$ . Los elementos de  $\text{Pin}$  se llaman *pinores*.

LEMA 3.7. *El grupo  $\text{Pin}$  coincide con el subgrupo de  $V$  formado por los productos de vectores unitarios.*

DEMOSTRACIÓN. Todo se reduce a ver que cualquier pinor es un producto de vectores unitarios, ya que un producto de vectores unitarios es claramente un pinor. Sea  $v = \mathbf{u}_k \cdots \mathbf{u}_1$  un pinor. Como  $q(v) = v\tilde{v} = \epsilon$ ,  $\epsilon = \pm 1$ , resulta que  $q(\mathbf{u}_k) \cdots q(\mathbf{u}_1) = \epsilon$ . Sea  $\lambda_j = |\mathbf{u}_j| > 0$  y  $\varepsilon_j = \epsilon_{\mathbf{u}_j}$ , de modo que  $q(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j^2 = \varepsilon_j \lambda_j^2$ . Entonces

$$\epsilon = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \lambda_1^2 \cdots \lambda_k^2,$$

de lo cual se desprende que  $\lambda_1 \cdots \lambda_k = 1$ . Como consecuencia,  $v = \mathbf{u}'_k \cdots \mathbf{u}'_1$ , con  $\mathbf{u}'_j = \mathbf{u}_j / \lambda_j$ , y  $\mathbf{u}'_j$  es un vector unitario:  $q(\mathbf{u}'_j) = q(\mathbf{u}_j) / \lambda_j^2 = \varepsilon_j$ .  $\square$

TEOREMA 3.8. *El homomorfismo  $\text{Pin}_{r,s} \rightarrow \text{O}_{r,s}$ ,  $v \mapsto \underline{v}$ , es sobreyectivo y su núcleo es  $\{\pm 1\}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Es sobreyectivo porque toda reflexión tiene la forma  $m_{\mathbf{u}}$  con  $\mathbf{u}$  un vector unitario, y su núcleo lo forman los escalares  $\lambda$  tales que  $q(\lambda) = \lambda^2 = 1$ .  $\square$

El grupo  $\text{Spin} = \text{Spin}_{r,s}$  es el subgrupo de los elementos pares de  $\text{Pin}_{r,s}$ , esto es, pinores que son producto de un número par de vectores unitarios (*espinores*).

COROLARIO 3.9.  $\tilde{\rho} : \text{Spin}_{r,s} \rightarrow \text{SO}_{r,s}$  es sobreyectivo y su núcleo es  $\{\pm 1\}$ .

Puesto que los espinores  $R$  son versores unitarios, en general se tiene que  $R\tilde{R} = \pm 1$ . Si  $R\tilde{R} = 1$ , se dice que el espinor es un *rotor*. En el caso euclídeo, todos los espinores son rotores, pero en general esto no es así: si  $r, s > 0$  y  $v = \mathbf{a}\mathbf{b}$  con  $\mathbf{a}^2 = 1$  y  $\mathbf{b}^2 = -1$ , entonces  $v\tilde{v} = -1$ .

Los rotores forman un subgrupo normal, que denotaremos  $\text{Spin}_{r,s}^+$ , de  $\text{Spin}_{r,s}$ . De hecho, la aplicación  $\text{Spin}_{r,s} \rightarrow \{\pm 1\}$ ,  $S \mapsto S\tilde{S}$ , es un homomorfismo y su núcleo es el grupo de rotores. Como se verá en la sección siguiente, este grupo es central en el estudio de la geometría ortogonal de  $E_{r,s}$ .

TEOREMA 3.10 (de covariancia geométrica). *Sea  $v \in V_{r,s}^+$ . Entonces  $\underline{v} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  es un automorfismo del álgebra geométrica (esto es, un automorfismo lineal que preserve grados y que es un homomorfismo de los productos geométrico, exterior e interior).*

DEMOSTRACIÓN. En efecto,  $\underline{v}$  es lineal y es un homomorfismo del producto geométrico, ya que  $\underline{v}(xy) = v(xy)v^{-1} = vxv^{-1}vyv^{-1} = \underline{v}(x)\underline{v}(y)$ . Como  $\underline{v}$  transforma vectores en vectores, resulta que preserve grados. El hecho de que sea, además, un homomorfismo de los productos exterior e interior es consecuencia de la caracterización de estas operaciones por las fórmulas del teorema 2.31.  $\square$

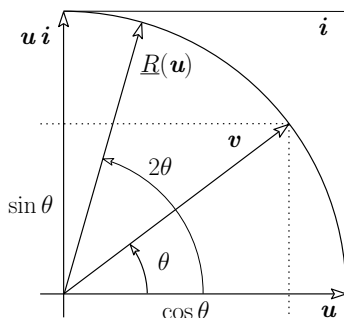


Figura 1: Geometría del rotor  $R = vu$ ,  $u$  y  $v$  unitarios.

### 3.4. UN EJEMPLO ARQUETÍPICO

«La más notable fórmula de las matemáticas es  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Esta es nuestra joya [...] la unificación del álgebra y la geometría» (R. Feynman, *Lecture Notes in Physics*, Volume I, Section 22-6). Veamos qué dice el AG de esta joya.

Sean  $u$  y  $v$  dos vectores unitarios linealmente independientes del espacio euclídeo  $E_n$  y consideremos el rotor  $R = vu$  (véase la figura 1). Éste produce la rotación  $\underline{R}(x) = RxR^{-1}$ . ¿Cuál es el eje y el ángulo de giro de esta rotación?

Sea  $\theta \in (0, \pi)$  el ángulo euclídeo entre  $u$  y  $v$ :

$$\cos \theta = u \cdot v.$$

Sea  $i$  la unidad de área del plano orientado  $P = \langle u, v \rangle$ , es decir,  $i = u_1 u_2$  con  $u_1, u_2$  una base ortonormal positiva de  $P$ . Entonces  $i^2 = -1$ . Además,  $x \mapsto xi$  es la rotación antihoraria de  $P$  de amplitud  $\pi/2$ , pues  $u_1 i = u_2$  y  $u_2 i = -u_1$ . En particular  $u, ui$  es una base ortonormal positiva de  $P$  y por tanto

$$v = u \cos \theta + ui \sin \theta.$$

De esto se sigue que  $u \wedge v = u \wedge ui \sin \theta = uui \sin \theta = i \sin \theta$  y, como consecuencia,

$$R = vu = v \cdot u + v \wedge u = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}.$$

Llegamos así a la que podemos llamar *fórmula espinorial de Euler*:

$$\underline{R}(x) = e^{-i\theta} x e^{i\theta}.$$

**TEOREMA 3.11.**  $\underline{R}$  es una rotación en  $P$  de amplitud  $2\theta$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Un vector  $x$  ortogonal a  $P$  anticonmuta con  $u$  y  $v$ . Por tanto conmuta con  $i$ , y  $e^{-i\theta} x e^{i\theta} = x$ . Por otra parte, un  $x \in P$  anticonmuta con  $i$  y por tanto  $e^{-i\theta} x e^{i\theta} = x e^{2i\theta}$ , que es la rotación de  $x$  en  $P$  de amplitud  $2\theta$  en la dirección positiva de  $P$ .  $\square$

EJEMPLO 3.12. Supongamos que  $n = 3$ . Si  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al plano orientado  $P$ , la unidad de volumen de  $E_3$  es  $\mathbf{i} = \mathbf{i}\mathbf{n}$ . Así  $\mathbf{i} = \mathbf{i}\mathbf{n}$  y la rotación  $f_{\mathbf{n},\alpha}$  de eje  $\mathbf{n}$  y amplitud  $\alpha$  viene dada por la fórmula

$$f_{\mathbf{n},\alpha}(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{i}\mathbf{n}\alpha/2}\mathbf{x}e^{\mathbf{i}\mathbf{n}\alpha/2}.$$

Nótese que  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{i}\mathbf{n}\mathbf{i}\mathbf{n} = \mathbf{i}^2 = -1$ , ya que  $\mathbf{n}$  conmuta con  $\mathbf{i}$ . Con esto se pueden deducir fácilmente las llamadas *fórmulas de Olinde Rodrigues* para la composición de rotaciones (cf. [12]).

#### 4. GRUPOS DE LIE CON AG

El grupo de Lipschitz de  $E_{r,s}$ ,  $\Gamma = \Gamma_{r,s}$ , es el subgrupo de  $\mathcal{G}^\times$  formado por los elementos  $x \in \mathcal{G}^+ \cup \mathcal{G}^-$  que son invertibles y cumplen  $xEx^{-1} = E$ . Este grupo contiene claramente el grupo de versores  $V$ .

TEOREMA 4.1 (Lipschitz).  $\Gamma = V$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x \in \Gamma$  y definamos  $\underline{x} : E \rightarrow E$ ,  $\mathbf{e} \mapsto \widehat{x}\mathbf{e}x^{-1} = \pm x\mathbf{e}x^{-1}$ . Esta aplicación es manifestamente lineal. De hecho  $\underline{x} \in O_{r,s}$ , ya que  $q(\underline{x}\mathbf{e}) = (\underline{x}\mathbf{e})^2 = \widehat{x}\mathbf{e}x^{-1}\widehat{x}\mathbf{e}x^{-1}$ ,  $\widehat{x} = \pm x$ , y por tanto  $q(\underline{x}\mathbf{e}) = x\mathbf{e}x^{-1}x\mathbf{e}x^{-1} = \mathbf{e}^2 = q(\mathbf{e})$ . Tenemos así una aplicación  $\rho^\sharp : \Gamma \rightarrow O_{r,s}$ ,  $x \mapsto \underline{x}$ , que es sobreyectiva, pues su restricción a  $V$  es el homomorfismo sobreyectivo  $\widetilde{\rho}$ , y que también es un homomorfismo (si  $x, y \in \Gamma$ ,  $\underline{xy}(\mathbf{e}) = \widehat{xy}\mathbf{e}(xy)^{-1} = \widehat{x}\widehat{y}\mathbf{e}x^{-1}y^{-1} = \underline{x}(\underline{y}\mathbf{e}) = (\underline{x}\underline{y})(\mathbf{e})$ ). Se cumple además que  $\ker(\rho^\sharp) = \mathbb{R}^\times$ : si  $x \in \ker(\rho^\sharp)$ ,  $\widehat{x}\mathbf{e} = \mathbf{e}x$  para todo  $\mathbf{e} \in E$ , lo que equivale a  $\mathbf{e} \cdot x = 0$  y por tanto a que  $x$  es un escalar (proposición 2.23). La demostración se completa ahora fácilmente: si  $x \in \Gamma$ , existe un  $v \in V$  tal que  $\widetilde{\rho}(v) = \rho^\sharp(x)$ , lo cual significa que  $\lambda = xv^{-1} \in \ker(\rho^\sharp) = \mathbb{R}^\times$ , es decir,  $x = \lambda v \in V$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 4.2. La igualdad  $\Gamma = V$  también establece que  $\rho^\sharp = \widetilde{\rho}$ .

OBSERVACIÓN 4.3. Como  $SO$  y  $O$  son isomorfos a grupos de matrices, son automáticamente grupos de Lie (cf. [4]). Luego sus cubiertas dobles  $S = \text{Spin}$  y  $P = \text{Pin}$  son también grupos de Lie. Por otra parte, tenemos un homomorfismo sobreyectivo  $\mathbb{R}^\times \times S \rightarrow V$ ,  $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$  cuyo núcleo es  $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ , de lo cual se desprende que  $V$  es también un grupo de Lie.

##### 4.1. PRIMACÍA DEL GRUPO DE ROTORES

En los dos lemas siguientes se muestra que el grupo de rotores  $S^+ = \text{Spin}^+$  determina la estructura del grupo de espinores  $S = \text{Spin}$  y la del grupo de pinosres  $P = \text{Pin}$ .

LEMA 4.4. Si  $(r, s) = (n, 0)$  (caso euclídeo) o  $(r, s) = (0, n)$  (caso antieuclídeo), entonces  $S = S^+ y P = S^+ \sqcup \mathbf{u}S^+$  para cualquier vector unitario  $\mathbf{u}$  prefijado.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $v = \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_k \in P$ , donde los  $\mathbf{u}_j$  son vectores unitarios. Si  $k$  es par, entonces  $v \in S$  y  $v\widetilde{v} = \mathbf{u}_1^2 \cdots \mathbf{u}_k^2 = 1$  (en el caso antieuclídeo el producto es

$(-1)^k = 1$  ya que  $k$  es par). Por tanto  $v \in S^+$ . Si  $k$  es impar, entonces  $v = \mathbf{u}(\epsilon_{\mathbf{u}}\mathbf{u}v)$ , y  $\epsilon_{\mathbf{u}}\mathbf{u}v \in S^+$ .  $\square$

LEMA 4.5. Si  $r, s \geq 1$ , sean  $\mathbf{u}$  y  $\bar{\mathbf{u}}$  vectores unitarios tales que  $\mathbf{u}^2 = 1$  y  $\bar{\mathbf{u}}^2 = -1$ . Entonces se tiene:  $S = S^+ \sqcup \mathbf{u}\bar{\mathbf{u}}S^+$  y  $P = S^+ \sqcup \mathbf{u}S^+ \sqcup \bar{\mathbf{u}}S^+ \sqcup \mathbf{u}\bar{\mathbf{u}}S^+$ .

DEMOSTRACIÓN. Es claro que  $S = S^+ \sqcup S^-$ , donde  $v \in S^{\pm} \Leftrightarrow v\tilde{v} = \pm 1$ , y es fácil comprobar que  $w \in S^- \Leftrightarrow v = \mathbf{u}\bar{\mathbf{u}}w \in S^+$  (nótese que  $(\mathbf{u}\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{u}\bar{\mathbf{u}})^{\sim} = -1$ ). De manera similar,  $\mathbf{u}S^+$  y  $\bar{\mathbf{u}}S^+$  son los pinos impares  $v$  tales que  $v\tilde{v} = +1$  y  $v\tilde{v} = -1$ , respectivamente.  $\square$

PROPOSICIÓN 4.6. Si  $n \leq 5$ ,  $\text{Spin}^+ = \{R \in \mathcal{G}^+ \mid R\tilde{R} = 1\}$ .

DEMOSTRACIÓN. Cf. [8, Prop. 6.20].  $S^+$  está contenido en  $\{R \in \mathcal{G}^+ \mid R\tilde{R} = 1\}$ . Sea  $R$  un multivector par tal que  $R\tilde{R} = 1$ . Para demostrar que  $R \in S^+$ , es suficiente ver (teorema 4.1) que  $\mathbf{y} = R\mathbf{x}\tilde{R}$  es un vector para cualquier vector  $\mathbf{x}$ .

Puesto que  $\mathbf{y}$  es impar,  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}$  y  $n \leq 5$ , se tiene que  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_5$ . Así pues será suficiente comprobar que  $\mathbf{y}_5 = 0$ . Dado que esto es evidente para  $n < 5$ , podemos además suponer que  $n = 5$ . En ese caso  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \lambda\mathbf{i}$ , siendo  $\mathbf{i}$  un pseudoescalar. Usando que  $\mathbf{i}$  es un elemento central,

$$\lambda = (\mathbf{y}\mathbf{i}^{-1})_0 = (R\mathbf{x}\tilde{R}\mathbf{i}^{-1})_0 = (R\mathbf{x}\mathbf{i}^{-1}\tilde{R})_0 = (\mathbf{x}\mathbf{i}^{-1}\tilde{R}R)_0 = (\mathbf{x}\mathbf{i}^{-1})_0 = 0,$$

y esto termina la prueba.  $\square$

OBSERVACIÓN 4.7. La proposición 4.6 no es cierta para  $n > 5$ .

EJEMPLO 4.8 (*Rotores de  $E_1$* ). Para  $n = 1$ , las posibles signaturas son  $1 \sim (1, 0)$  y  $\bar{1} \sim (0, 1)$ . Se tiene

$$S_1 = S_1^+ = S_{\bar{1}} = S_{\bar{1}}^+,$$

y como  $S_1^+ = \{\pm 1\}$  (proposición 4.6), este grupo está formado por escalares  $\lambda$  tales que  $\lambda^2 = 1$ , es decir,

$$S_1 = \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Nótese que no es conexo. Por otra parte

$$P_1 = P_{\bar{1}} = \{\pm 1, \pm \mathbf{u}\},$$

siendo  $\mathbf{u} \in E$  un vector unitario. Este grupo es  $\simeq \mathbb{Z}_4$  si  $\mathbf{u}^2 = -1$  y  $\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  si  $\mathbf{u}^2 = 1$ .

Finalmente  $O_1 = \{\pm \text{Id}\}$  y  $SO_1 = \{\text{Id}\}$ , con  $\tilde{\rho}(\pm 1) = \text{Id}$  y  $\tilde{\rho}(\pm \mathbf{u}) = -\text{Id}$ .

EJEMPLO 4.9 (*Rotores de  $E_2$* ). Los casos  $E_2$  y  $E_{\bar{2}}$  tienen un tratamiento similar. Si  $\mathbf{i}$  es la unidad de área,  $\mathcal{G}^+ = \{\alpha + \beta\mathbf{i} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ . Como  $\mathbf{i}^2 = -1$  e  $\tilde{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$ ,  $(\alpha + \beta\mathbf{i})(\alpha + \beta\mathbf{i})^{\sim} = \alpha^2 + \beta^2$  y

$$S_2 = S_{\bar{2}} = \{\alpha + \beta\mathbf{i} \mid \alpha^2 + \beta^2 = 1\} = U_1,$$

el grupo del círculo unidad. Este grupo es conexo pero no simplemente conexo (una vuelta al círculo unidad no se puede contraer a 1, y de hecho sucede que  $\pi_1(U_1) \simeq \mathbb{Z}$ ).

Si  $\mathbf{e}_1$  es un vector unitario cualquiera, entonces

$$P_2 = P_{\bar{2}} = S^+ \sqcup S^- = U_1 \sqcup \mathbf{e}_1 U_1,$$

y  $\tilde{\rho}(\mathbf{e}_1 e^{i\theta})$  es la simetría en la dirección  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 e^{i\theta}$ , pues  $-\mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{v}^{-1} = -\mathbf{v}$ .

EJEMPLO 4.10 (*Rotores de  $E_{1,1}$* ). Sea  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1$  una base ortonormal de  $E_{1,1}$  e  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0$  (en los espacios lorentzianos, el «eje temporal»  $\mathbf{e}_0$  se suele poner en la dirección «vertical»). Seguimos teniendo  $\mathcal{G}^+ = \{\alpha + \beta \mathbf{i} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  y  $(\alpha + \beta \mathbf{i})^\sim = \alpha - \beta \mathbf{i}$ , pero

$$(\alpha + \beta \mathbf{i})(\alpha + \beta \mathbf{i})^\sim = \alpha^2 - \beta^2$$

toda vez que  $\mathbf{i}^2 = 1$ . Así,

$$S_{1,1}^+ = \{\alpha + \beta \mathbf{i} \mid \alpha^2 - \beta^2 = 1\}$$

y por tanto  $S_{1,1}^+$  tiene dos componentes conexas (las dos ramas de una hipérbola en  $\mathcal{G}^+$ , ambas  $\simeq \mathbb{R}$ , y por tanto simplemente conexas), distinguidas por el signo de  $\alpha$  (véase la figura 2). Las dos ramas están parametrizadas por  $\alpha = \epsilon \cosh \lambda$ ,  $\beta = \sinh \lambda$  ( $\epsilon = \pm 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

Tras algunos cálculos (usando que  $\mathbf{i}$  anticonmuta con  $\mathbf{e}_0$  y  $\mathbf{e}_1$ , y propiedades básicas de  $\cosh$  y  $\sinh$ ), se halla que la acción de  $R = R_{\epsilon, \lambda} = \epsilon \cosh \lambda + \mathbf{i} \sinh \lambda = \epsilon e^{\epsilon \lambda \mathbf{i}}$  sobre  $\mathbf{e}_0$  y  $\mathbf{e}_1$  es

$$\underline{R}(\mathbf{e}_0) = \mathbf{e}_0 \cosh 2\epsilon \lambda + \mathbf{e}_1 \sinh 2\epsilon \lambda, \quad \underline{R}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_0 \sinh 2\epsilon \lambda + \mathbf{e}_1 \cosh 2\epsilon \lambda.$$

Constatamos que  $R_{\epsilon, \lambda}$  y  $R_{-\epsilon, -\lambda}$  producen la misma isometría (un hecho no fortuito, ya que  $R_{-\epsilon, -\lambda} = -R_{\epsilon, \lambda}$  y  $\pm R$  producen la misma isometría), con lo cual  $\text{SO}_{1,1}^+$  es isomorfo a  $\mathbb{R}$  vía la aplicación (en forma matricial)

$$t \mapsto H_t = \begin{pmatrix} \cosh 2t & \sinh 2t \\ \sinh 2t & \cosh 2t \end{pmatrix},$$

pues  $H_t H_{t'} = H_{t+t'}$ .

Visto que  $S_{1,1}^+$  tiene dos componentes,  $P_{1,1}$  tiene ocho. Si ponemos  $S^{+\epsilon} = \{R_{\epsilon, \lambda}\}$ , dichas componentes son

$$S^{++}, S^{+-}, \mathbf{e}_0 S^{++}, \mathbf{e}_0 S^{+-}, \mathbf{e}_1 S^{++}, \mathbf{e}_1 S^{+-}, \mathbf{i} S^{++}, \mathbf{i} S^{+-}.$$

De lo cual se desprende que  $\text{O}_{1,1}$  tiene cuatro componentes:

$$\text{SO}_{1,1}^+, m_{\mathbf{e}_1} \text{SO}_{1,1}^+, m_{\mathbf{e}_0} \text{SO}_{1,1}^+, \quad \text{y} \quad m_{\mathbf{e}_1} m_{\mathbf{e}_0} \text{SO}_{1,1}^+ = -\text{SO}_{1,1}^+.$$

EJEMPLO 4.11 (*Rotores de  $E_3$* ). Sea  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  una base ortonormal,  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  (unidad de volumen,  $\mathbf{i}^2 = -1$ ,  $\tilde{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$ ),  $\mathcal{G}^+ = \{\alpha + \mathbf{x} \mathbf{i} \mid \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in E_3\}$  (isomorfa al cuerpo de los cuaternios). Entonces  $(\alpha + \mathbf{x} \mathbf{i})(\alpha + \mathbf{x} \mathbf{i})^\sim = \alpha^2 + |\mathbf{x}|^2$  y por tanto



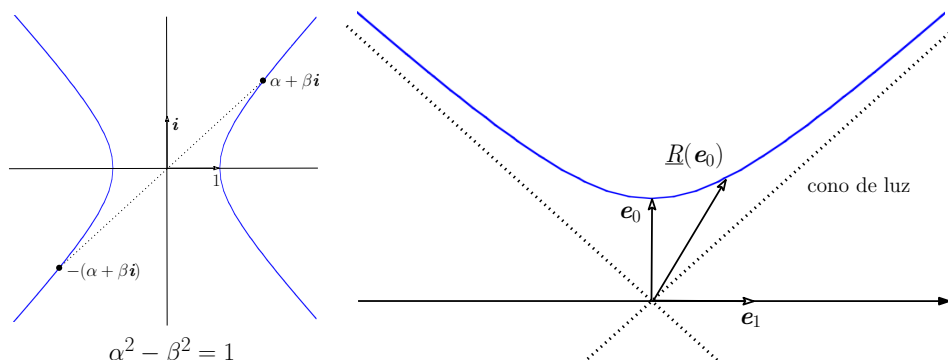


Figura 2: Aspectos geométricos de los rotores de  $E_{1,1}$ .

$S_3 = S_{\bar{3}} = S_3^+ = S_{\bar{3}}^+ = \{\alpha + \mathbf{x}\mathbf{i} \mid \alpha^2 + |\mathbf{x}|^2 = 1\} = \text{SU}_2$  (grupo de los cuaternios unitarios). Puesto que  $\text{SU}_2$  es una 3-esfera, es conexo y simplemente conexo.

La cubierta  $S_3 \rightarrow \text{SO}_3$  coincide con la cubierta  $2 : 1$  clásica  $\text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}_3$ , en la cual un cuaternio unidad  $\mathbf{u}$  actúa en  $E_3$  como  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{u}^{-1}$ .

Si como  $\mathbf{u}$  tomamos las unidades cuaterniónicas  $\mathbf{i}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ , las correspondientes isometrías son las simetrías axiales respecto de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , respectivamente.

Las dos componentes de  $P_3$  son  $S_3$  y  $\mathbf{u}S_3$ , siendo  $\mathbf{u}$  cualquier vector unidad prefijado, y las dos componentes de  $O_3$  son  $\text{SO}_3$  y  $m_{\mathbf{u}}\text{SO}_3$ . Si  $f$  es una rotación, y  $\mathbf{v} = f^{-1}(\mathbf{u})$ , o  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ , entonces  $m_{\mathbf{u}}f$  es la reflexión en la dirección  $\mathbf{v}$  (o en el plano  $\mathbf{v}^\perp$ ).

#### 4.2. ROTORES PLANOS

Dados dos vectores unitarios linealmente independientes  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ ,  $R = \mathbf{v}\mathbf{u}$  es un espinor. Diremos que es el *espinor plano* definido por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Puesto que  $R\tilde{R} = \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2$ , vemos que  $R$  es un rotor (en cuyo caso diremos que es un *rotor plano*) si y sólo si  $\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 = 1$ , esto es, si o bien  $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1$  o  $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = -1$ . En ambos casos,  $R = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  y  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - 1$ .

Si  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = 0$ , entonces  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = 1$ , o bien  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \epsilon = \pm 1$ , de donde  $R = \epsilon(1 - \epsilon\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \epsilon e^{-\epsilon\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}$ . Si se da este caso, el plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  es degenerado (basta comprobar que el vector  $\epsilon\mathbf{v} - \epsilon\mathbf{u}$  es ortogonal a  $\mathbf{u}$  y a  $\mathbf{v}$ ) y diremos que  $R$  es un rotor plano *parabólico*.

Si  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 < 0$ , entonces  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 < 1$ . Existe por tanto un único  $\alpha \in (0, \pi)$  tal que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos \alpha$  y  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = \cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$ . Poniendo  $U = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) / \sin \alpha$ , se tiene  $U^2 = -1$  y  $R = \cos \alpha - U \sin \alpha = e^{-U\alpha}$ . Si se da este caso, el plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  no contiene vectores isótropos y por tanto es euclídeo si  $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1$  y antieuclicídeo si  $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = -1$ . Diremos que  $R$  es *elíptico*.

Si  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 > 0$ , entonces  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 > 1$  y existe un único  $\alpha > 0$  tal que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \epsilon \cosh \alpha$ , siendo ahora  $\epsilon$  el signo de  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , y  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = \cosh^2 \alpha - 1 = \sinh^2 \alpha$ . Poniendo

$U = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) / \sinh \alpha$ , se tiene  $U^2 = 1$  y  $R = \epsilon \cosh \alpha - U \sinh \alpha = \epsilon e^{-U\epsilon\alpha}$ . Si se da este caso, el plano  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  es no degenerado y contiene vectores isótropos, de modo que es un plano hiperbólico. Diremos que  $R$  es *hiperbólico*.

OBSERVACIÓN 4.12. Salvo un signo, todos los rotores planos son exponenciales de bivectores y están conectados con 1 o  $-1$ . En el caso parabólico,  $R = \epsilon e^{-\epsilon \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}$  está conectado con  $\epsilon$  (basta considerar  $R(t) = \epsilon e^{-\epsilon t \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ya que  $R(1) = R$  y  $R(0) = \epsilon$ ). En el caso elíptico, todo rotor plano está conectado a 1 (basta hacer tender el ángulo  $\alpha$  a 0). En el caso hiperbólico, todo rotor plano está conectado con 1 si  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  es positivo y con  $-1$  si  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  es negativo.

TEOREMA 4.13. *Todo rotor  $R \in S^+$  está conectado a 1 o a  $-1$ . Si  $r \geq 2$  o  $s \geq 2$ , entonces todo rotor está conectado a 1 y como consecuencia  $S^+$  es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $R \in S^+$ , digamos  $R = \mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{2k}$ , con los  $\mathbf{u}_j$  unitarios. Es fácil ver que podemos reexpresar  $R$  como un producto de vectores unitarios de manera que todos los de signatura negativa aparezcan después de los de signatura positiva (si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores unitarios,  $\mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{v}\mathbf{u}\mathbf{v}^{-1}\mathbf{v} = -\underline{\mathbf{v}}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u}'\mathbf{v}$ , y  $\mathbf{u}' = -\underline{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$  es un vector unitario con la misma signatura que  $\mathbf{u}$  porque  $\underline{\mathbf{v}}$  es una isometría). Dado que el número de vectores positivos y de vectores negativos son ambos pares,  $R$  se puede expresar como un producto de  $k$  rotores planos. Como cada uno de estos rotores está conectado a 1 o a  $-1$ , lo mismo le sucede a  $R$ . En el caso en que  $r \geq 2$  o  $s \geq 2$ , podemos escoger dos vectores unitarios con la misma signatura, sean  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$ . Entonces  $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = -1$  y el camino  $t \mapsto e^{t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2} = \cos t + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \sin t$  conecta 1 ( $t = 0$ ) a  $-1$  ( $t = \pi$ ).  $\square$

COROLARIO 4.14. *Si  $r \geq 2$  o  $s \geq 2$ , la cubierta doble  $S^+ \rightarrow \text{SO}^+$  es no trivial.*

#### 4.3. ROTORES INFINITESIMALES

Se define un *rotor infinitesimal* como un vector tangente a  $S^+$  en 1.

TEOREMA 4.15. *Todo rotor infinitesimal es un bivector.*

DEMOSTRACIÓN. Adaptada de [8, Section 6.5]. Por definición, un rotor infinitesimal tiene la forma  $R'(0)$ , donde  $R(t) \in S^+$  es una función diferenciable de  $t$  definida en un intervalo abierto de  $0 \in \mathbb{R}$  con  $R(0) = 1$ . Se trata pues de ver que  $R'(0)$  es un bivector.

Tomando la derivada de  $R(t)\widetilde{R(t)} = 1$  respecto de  $t$  en 0 obtenemos  $\widetilde{R'(0)} = -R'(0)$ . Pero como  $R'(0)$  es un multivector par, esta condición muestra que los grados  $k = 2j$  de  $R'(0)$  tales que  $R'(0)_k \neq 0$  han de cumplir que  $k//2 = j$  ha de ser impar, digamos  $2l + 1$ , lo que conlleva  $k = 4l + 2$ ,  $l \geq 0$ . En particular,  $R'(0) = b + z$ , siendo  $b$  un bivector y  $z$  un multivector cuyo grado mínimo es  $\geq 6$ .

Usemos ahora que  $\mathbf{x}(t) = R(t)\mathbf{e}\widetilde{R(t)} \in E$  para cualquier vector  $\mathbf{e} \in E$  prefijado.

Tomando la derivada respecto de  $t$  en 0 se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(0) &= R'(0)\mathbf{e} + \widetilde{eR'(0)} \\ &= (b+z)\mathbf{e} - \mathbf{e}(b+z) \\ &= b\mathbf{e} - e\mathbf{b} + z\mathbf{e} - e\mathbf{z} \\ &= 2b \cdot \mathbf{e} + 2z \cdot \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Visto que  $\mathbf{x}'(0)$  y  $b \cdot \mathbf{e}$  son vectores y que el mínimo grado de  $z \cdot \mathbf{e}$  es  $\geq 5$ , se concluye que  $z \cdot \mathbf{e} = 0$ . Como esta condición es válida para cualquier vector  $\mathbf{e}$ , la proposición 2.23 nos permite concluir que  $z = 0$ .  $\square$

Para demostrar que todo bivector es un rotor infinitesimal, tenemos que dar un pequeño rodeo.

Dado un bivector  $b \in \mathcal{G}^2$ , se define la aplicación lineal  $\text{ad}_b : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  por la fórmula  $\text{ad}_b(x) = bx - xb = [b, x]$  (*conmutador de  $b$  y  $x$* ).

**PROPOSICIÓN 4.16.** *Para todo bivector  $b$ , el operador  $\text{ad}_b$  preserva grados y es una derivación del producto geométrico.*

**DEMOSTRACIÓN.** Está claro que  $\text{ad}_b$  anula los escalares y que transforma vectores en vectores, pues  $\text{ad}_b(\mathbf{e}) = 2b \cdot \mathbf{e}$ . Sea ahora  $x \in \mathcal{G}^k$ ,  $k \geq 2$ . Entonces

$$bx = b \cdot x + (bx)_k + b \wedge x \quad \text{y} \quad xb = x \cdot b + (xb)_k + x \wedge b.$$

Pero, en este caso,  $x \cdot b = b \cdot x$  y  $x \wedge b = b \wedge x$ . Por tanto  $[b, x] = (bx)_k - (xb)_k$ , que es un  $k$ -vector. Que  $\text{ad}_b$  es una derivación se establece con un sencillo cálculo.  $\square$

Sea  $\mathfrak{so}(E) \subseteq \text{End}(E)$  el subespacio vectorial formado por los endomorfismos antisimétricos.

**PROPOSICIÓN 4.17.** *Si  $b \in \mathcal{G}^2$ , entonces  $\text{ad}_b \in \mathfrak{so}(E)$  para todo  $b \in \mathcal{G}^2$ . Además, la aplicación  $\mathcal{G}^2 \rightarrow \mathfrak{so}(E)$ ,  $b \mapsto \text{ad}_b$ , es un isomorfismo lineal.*

**DEMOSTRACIÓN.** De un lado,  $\text{ad}_b(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}' = 2(b \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}' = 2b \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}')$  y, del otro,  $\mathbf{e} \cdot (-\text{ad}_b(\mathbf{e}')) = 2\mathbf{e} \cdot (\mathbf{e}' \cdot b) = 2(\mathbf{e} \wedge \mathbf{e}') \cdot b = \text{ad}_b(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}'$ , de modo que  $\text{ad}_b^\dagger = -\text{ad}_b$ .

Por otra parte, la aplicación lineal  $b \mapsto \text{ad}_b$  es inyectiva, ya que si  $\text{ad}_b = 0$ , entonces  $\mathbf{e} \cdot b = 0$  para todo vector  $\mathbf{e}$  y esto implica que  $b = 0$  (proposición 2.23). Finalmente la igualdad  $\dim \mathcal{G}^2 = \binom{n}{2} = \dim \mathfrak{so}(E)$  nos dice que dicha aplicación es sobreyectiva.  $\square$

**TEOREMA 4.18** (Exponencial de un bivector). *Para todo  $b \in \mathcal{G}^2$ ,  $\pm e^b \in S^+$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Cf. [8, Theorem 6.17]. Está claro que  $R = e^b$  es un multivector par. Además,  $R \in \mathcal{G}^\times$ , ya que  $R\tilde{R} = e^b e^{\tilde{b}} = e^b e^{-b} = 1$ . Para ver que  $R$  es un rotor, basta ver (teorema 4.1) que  $R\mathbf{x}\tilde{R} \in E$  para todo  $\mathbf{x} \in E$ .

Sea  $W = E^\perp$  el espacio  $q$ -ortogonal de  $E$  en  $\mathcal{G}$ , esto es,  $W = \mathbb{R} \oplus \mathcal{G}^2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{G}^n$ . Tomemos cualesquiera  $\mathbf{x} \in E$ ,  $y \in W$ , y definamos la aplicación  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por la fórmula  $f(t) = q(e^{tb}\mathbf{x}e^{-tb}, y)$ . Las sucesivas derivadas de  $f$  tienen la forma siguiente:

$$f'(t) = q(be^{tb}\mathbf{x}e^{-tb} - e^{tb}\mathbf{x}e^{-tb}b, y) = q([b, e^{tb}\mathbf{x}e^{-tb}], y),$$

$$f''(t) = q([b, be^{tb}\mathbf{x}e^{-tb} - e^{tb}\mathbf{x}e^{-tb}b], y) = q([b, [b, e^{tb}\mathbf{x}e^{-tb}]], y),$$

y así sucesivamente. Para  $t = 0$ , obtenemos

$$f^{(k)}(0) = q(\text{ad}_b^k(\mathbf{x}), y) = 0$$

porque  $\text{ad}_b$  es un endomorfismo de  $E$ . Como  $f$  es una función analítica real, se desprende que  $f \equiv 0$  y, como consecuencia,  $q(e^{tb}\mathbf{x}e^{-tb}, y) = 0$ . Por tanto,  $e^{tb}\mathbf{x}e^{-tb} \in W^\perp = E$ .  $\square$

**COROLARIO 4.19.** *Si  $b \in \mathcal{G}^2$ , entonces  $b$  es un rotor infinitesimal.*

**DEMOSTRACIÓN.** El teorema nos asegura que  $R(t) = e^{tb} \in S^+$  para todo  $t$ , y está claro que  $R'(0) = b$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 4.20.** Con esto queda probado que el espacio tangente a  $S^+$  en 1, que denotamos  $\text{lie}(S^+)$ , es igual a  $\mathcal{G}^2$ . Pero para todo grupo de Lie el espacio tangente en el elemento neutro,  $\text{lie}(G)$ , es un álgebra de Lie con el corchete de Lie (cf. [4]) y esto plantea la cuestión de encontrar la representación de este corchete, para el caso  $\text{lie}(S^+)$ , en  $\mathcal{G}^2$ . La solución es que es el conmutador  $[b, b']$ . De hecho, con un sencillo cálculo se comprueba que el isomorfismo  $\text{ad} : \mathcal{G}^2 \rightarrow \mathfrak{so}(E)$  cumple  $\text{ad}_{[b, b']} = [\text{ad}_b, \text{ad}_{b'}]$ , lo que significa que es un isomorfismo de  $\mathcal{G}^2$  con el conmutador de bivectores en  $\mathfrak{so}(E)$  con el conmutador de endomorfismos antisimétricos. Pero la segunda álgebra se identifica con  $\text{lie}(\text{SO})$  y ésta con  $\text{lie}(S^+)$  por el isomorfismo inducido por el homomorfismo  $S^+ \rightarrow \text{SO}$ .

**OBSERVACIÓN 4.21.** Consideremos la aplicación  $\exp : \mathcal{G}^2 \rightarrow S^+$ ,  $b \mapsto e^b$ , y su diferencial en 0:  $d_0 \exp : \mathcal{G} \rightarrow \text{lie}(S^+) = \mathcal{G}^2$ . Dado que  $(d_0 \exp)(b) = \frac{d}{dt} e^{tb}|_{t=0} = b$ , resulta que  $d_0 \exp = \text{Id}_{\mathcal{G}^2}$ . Ahora el teorema de la función inversa nos asegura que existe un entorno abierto de 0 en  $\mathcal{G}^2$  que  $\exp$  aplica difeomórficamente en un entorno abierto  $U$  de 1 en  $S^+$ .

Para los rotores  $u$  de  $U$ , existe un bivector  $b$  tal que  $u = e^b$ , pero para rotores arbitrarios sólo podemos afirmar que serán o un producto de exponenciales de bivectores, o límites de tales productos, ya que el subgrupo generado por  $U$  es abierto y el cierre de este abierto es  $S^+$ .

#### 4.4. NOTA SOBRE UN TEOREMA DE RIESZ

Sea  $E = E_{r,s}$ ,  $n = r + s$ , y  $L \in \text{SO}_{r,s}^+$  (este grupo es la componente conexa de la identidad de  $\text{SO}_{r,s}$ ). El teorema de Riesz en cuestión es el siguiente:

TEOREMA 4.22. Si  $(r, s)$  es de una de las formas  $(n, 0)$ ,  $(0, n)$ ,  $(1, n-1)$  o  $(n-1, 1)$ , existe un bivector  $b \in \mathcal{G}^2$  tal que

$$Lx = e^b x e^{-b}.$$

DEMOSTRACIÓN. Véase [10, § 4.12] o [13]. El caso euclídeo (y antieuclicídeo) se puede demostrar fácilmente a partir de la clasificación de isometrías de  $E_n$ . Escojamos unidades de área  $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_k$  en planos dos a dos ortogonales de  $E_n$ , y ángulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in [0, 2\pi)$  (no necesariamente distintos), y consideremos el rotor  $R = \exp(-\mathbf{i}_k \alpha_k / 2) \cdots \exp(-\mathbf{i}_1 \alpha_1 / 2)$ . Puesto que los  $\mathbf{i}_j$  conmutan dos a dos, resulta que  $R = e^b$ , con  $b = -(\mathbf{i}_k \alpha_k + \cdots + \mathbf{i}_1 \alpha_1) / 2$ . La isometría  $\underline{R}$  es la composición de rotaciones de amplitud  $\alpha_j$  en los planos  $[\mathbf{i}_j]$  y la teoría básica de las rotaciones de  $E_n$  muestra que toda rotación se puede obtener de esta manera.  $\square$

AGRADECIMIENTOS. A la RSME, la SCM y la UPC, por el apoyo institucional recibido en los últimos dos años para actividades relacionadas con el AG, y muy especialmente para la organización de la sexta edición de la conferencia internacional «Applied Geometric Algebra in Computer Science and Engineering 2015» (AGACSE 2015). A José A. Vallejo, de la Universidad San Luis Potosí (México), y a Félix Delgado de la Mata, Director del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVA), por haberme invitado a impartir minicursos sobre AG y sus aplicaciones en 2015 y 2016. A la RSME, la UIMP y la UPC por el apoyo en relación a la organización de la Escuela Santaló 2016. A Antonio Campillo, Presidente de la RSME durante la primera mitad de la organización de dicha Escuela, y a Francisco Marcellán, Presidente de la RSME durante la segunda mitad, por la confianza y constante ayuda. A los profesores invitados a dicha Escuela (David Hestenes, Anthony Lasenby, Leo Dorst y Joan Lasenby), por haber aceptado sin demora la invitación y por las excelentes conferencias que impartieron. A Narcís Sayols, Secretario de la Santaló 2016, por su eficaz ayuda en la prolongada preparación y en su desarrollo en Santander, así como por haber sugerido mejoras a un borrador de este artículo. Finalmente, a todos los participantes en AGACSE 2015 y en la Santaló 2016, por el estímulo que su interés ha significado para mí.

## REFERENCIAS

- [1] G. CASANOVA, *L'algèbre vectorielle*, Que sais-je? 1657, Presses Universitaires de France, 1976.
- [2] C. DORAN Y A. LASENBY, *Geometric algebra for physicists*, Cambridge University Press, 2003.
- [3] L. DORST, D. FONTIJNE Y S. MANN, *Geometric algebra for computer science: An object-oriented approach to geometry*, Elsevier / Morgan Kaufmann, 2007 y 2009 (edición revisada).
- [4] B. HALL, *Lie groups, Lie algebras, and representations: An elementary introduction*, GTM 222, Springer, 2003.

- [5] D. HESTENES, *Space-time algebra*, Gordon & Breach, 1966; Birkhäuser, 2015 (2.<sup>a</sup> edición).
- [6] D. HESTENES Y G. SOBCZYK, *Clifford algebra to geometric calculus*, Reidel, 1984.
- [7] P. LOUNESTO, Marcel Riesz's work on Clifford algebras, 1993. Anexo a [10].
- [8] D. LUNDHOLM Y L. SVENSSON, Clifford algebra, geometric algebra, and applications, <http://arxiv.org/pdf/0907.5356.pdf>, 2009. Actualizado 2016.
- [9] I. R. PORTEOUS, *Topological geometry* (2.<sup>a</sup> edición), CUP, 1981 (1.<sup>a</sup> edición: 1969).
- [10] M. RIESZ, *Clifford numbers and spinors*, Fundamental Theories of Physics 54, Kluwer Academic Publishers, 1997. Es una edición por E. F. Bolinder y P. Lounesto de la memoria *Clifford numbers and spinors* de M. Riesz, Lecture Series No. 38, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, 1958. Incluye un anexo de Bolinder y el artículo [7] de Lounesto.
- [11] J. SNYGG, *Clifford algebra—A computational tool for physicists*, Oxford University Press, 1997.
- [12] S. XAMBÓ, Escondidas sendas de la geometría proyectiva a los formalismos cuánticos, *El legado matemático de Juan Bautista Sancho Guimerá* (ed. por D. Hernández-Ruipérez y A. Campillo), 233–274, Real Sociedad Matemática Española y Ediciones Universidad de Salamanca, 2015. Disponible en <https://mat-web.upc.edu/people/sebastia.xambo/GA/2015-Xambo--EscondidasSendas-JBSG-in-memoriám.pdf>
- [13] S. XAMBÓ, *Geometric algebra and orthogonal geometries*, 2016. Es una versión en inglés, con algunas ampliaciones, del presente artículo. Disponible en <https://mat-web.upc.edu/people/sebastia.xambo/GA/2016-Xambo-GA.pdf>

SEBASTIÀ XAMBÓ, DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Correo electrónico: [sebastia.xambo@upc.edu](mailto:sebastia.xambo@upc.edu)

Página web: <https://www.mat.upc.edu/en/people/sebastia.xambo/>